

COURS

Généralités sur les fonctions

2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Tout le programme de seconde, et une bonne part de celui du lycée, tient sur une seule idée : une **fonction** associe à chaque nombre un autre nombre, et un seul. Ce mot *seul* est ce qui distingue une fonction d'une correspondance quelconque, et c'est aussi ce qui permet de tout dessiner. Un graphique de fonction ne repasse jamais deux fois au-dessus du même point de l'axe horizontal.

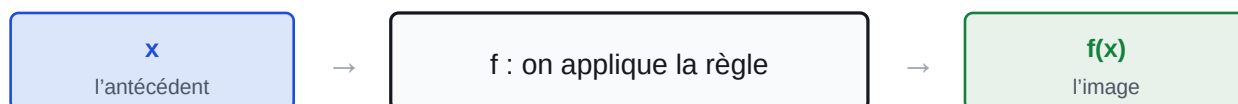
1 Image, antécédent, domaine

DÉFINITION

Une **fonction** f associe à un nombre x un unique nombre noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est l'**image** de x , et que x est un **antécédent** de $f(x)$. L'asymétrie est essentielle : l'image et un antécédent. Un nombre peut avoir plusieurs antécédents — pour $f(x) = x^2$, le nombre 9 en a deux, 3 et -3 — mais jamais deux images.

$$x \mapsto f(x)$$

une entrée, une sortie — et jamais deux sorties pour une même entrée



un antécédent a **une seule** image ; une image peut avoir **plusieurs** antécédents.
c'est toute la définition d'une fonction, et la source de la moitié des erreurs.

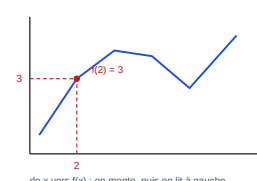
Une entrée, une sortie — et jamais l'inverse.

DÉFINITION

Le **domaine de définition** D_f est l'ensemble des nombres qui ont une image. Deux interdits le déterminent presque toujours : on ne divise pas par zéro, et on ne prend pas la racine carrée d'un nombre négatif. Ainsi $\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

LIRE UNE IMAGE, LIRE UN ANTÉCÉDENT

- 1 **Une image, de x vers $f(x)$** : on part de x sur l'axe horizontal, on monte jusqu'à la courbe, on lit à gauche sur l'axe vertical.
- 2 **Un antécédent, de $f(x)$ vers x** : on part de la valeur sur l'axe vertical, on avance horizontalement, on lit en dessous **chaque** point de rencontre.
il peut y en avoir plusieurs, aucun, ou un seul — d'où le pluriel de la question.
- 3 **Contrôler le sens de lecture** : l'énoncé demande-t-il « l'image de 2 » ou « les antécédents de 2 » ? Les deux questions ne se lisent pas dans le même sens.



Monter depuis l'axe des abscisses, lire sur celui des ordonnées.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Répondre « 2 » à la question « quel est l'antécédent de 3 ? » alors qu'on a lu $f(2) = 3$... puis s'arrêter là. — la réponse peut être juste et incomplète : si la courbe repasse à la hauteur 3 ailleurs, il existe d'autres antécédents, et les oublier coûte autant qu'une erreur.

Le réflexe : tracer la droite horizontale d'ordonnée 3 en entier, d'un bord à l'autre du graphique, et compter toutes les intersections.

2 Variations et extremums

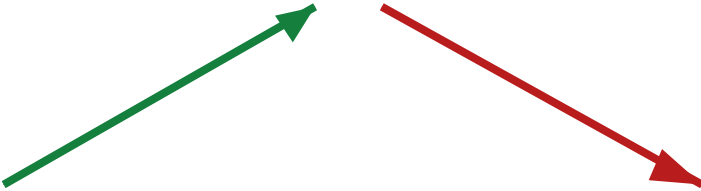
DÉFINITION

Sur un intervalle I , f est **croissante** si l'ordre des nombres est conservé : lorsque $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$. Elle est **décroissante** si l'ordre est inversé. Graphiquement, une fonction croissante monte lorsqu'on parcourt la courbe de gauche à droite — jamais dans l'autre sens.

DÉFINITION

Un **maximum** de f sur I est la plus grande valeur atteinte : c'est un nombre, $f(a)$, atteint **en** un nombre a . Un **minimum** est la plus petite. Le **tableau de variations** résume tout : les valeurs de x sur la première ligne, des flèches montantes ou descendantes sur la seconde, et les extremums écrits aux sommets et aux creux.

x	-3	1	5
f		4	



la flèche monte, la fonction croît.

le sommet est le maximum : 4, atteint en 1.

Une flèche par intervalle, et les extremums à leurs extrémités.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Répondre « le maximum est 1 » quand la fonction atteint 4 en $x = 1$. — le maximum est une **valeur de la fonction**, pas la valeur de x où elle est atteinte. Ici le maximum vaut 4, et il est atteint en 1.

Le réflexe : formuler la réponse en une phrase complète : « le maximum vaut 4, atteint en $x = 1$ ». La phrase rend la confusion impossible.

Le tableau de variations sert à bien plus qu'à résumer : il permet de **compter les solutions** d'une équation qu'on ne sait pas résoudre. Si f croît de -2 à 4 sur un intervalle, alors toute valeur comprise entre -2 et 4 y est atteinte exactement une fois. En additionnant les intervalles, on obtient le nombre exact de solutions de $f(x) = k$ — sans jamais calculer une seule d'entre elles.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Lire les variations d'une courbe de droite à gauche. — une fonction se lit toujours dans le sens des x croissants. Lue à l'envers, une fonction croissante paraît décroissante — et l'erreur passe inaperçue parce que le mot employé est un mot juste.

Le réflexe : poser le doigt sur l'axe des abscisses et le faire glisser **vers la droite**, en regardant si la courbe monte ou descend.

3 Parité

RÈGLE

Une fonction est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x du domaine : sa courbe est alors symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**. Elle est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$: sa courbe est symétrique par rapport à l'**origine**. La plupart des fonctions ne sont ni l'une ni l'autre. Le test se fait toujours par le calcul, jamais sur le dessin — mais le dessin permet de deviner lequel tenter.

$$\text{paire : } f(-x) = f(x) \quad \text{impaire : } f(-x) = -f(x)$$

EXEMPLE

La fonction $f(x) = x^2 - 3$ est-elle paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre ?

- ① On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $-x$ partout, sans rien simplifier trop vite : $f(-x) = (-x)^2 - 3$.
- ② Or $(-x)^2 = x^2$, car le carré d'un nombre négatif est positif.
 $(-3)^2 = 9$
- ③ Donc $f(-x) = x^2 - 3 = f(x)$: la fonction est **paire**, et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
le terme constant -3 ne gêne pas : il ne contient pas x .
- ④ Contrôle numérique sur un cas : $f(2) = 1$ et $f(-2) = 1$.
 $2^2 - 3 = 1$

f est paire

À VÉRIFIER

- Ai-je vérifié le **domaine** : pas de division par zéro, pas de racine d'un négatif ?
- Image ou antécédent : ai-je lu le graphique dans le bon sens ?
- Pour un antécédent : ai-je cherché **tous** les points d'intersection ?
- Un extremum est une **valeur de f** , atteinte en un x : ai-je donné les deux ?
- Croissante se lit toujours **de gauche à droite**.
- Parité : ai-je calculé $f(-x)$ plutôt que de la deviner sur le dessin ?

À RETENIR

- Une fonction associe à x **une seule** image ; une image peut avoir plusieurs antécédents.
- **Domaine** : pas de division par 0, pas de racine d'un négatif.
- Image : de l'axe des x vers celui des y . Antécédent : le chemin inverse, et **tous** les points.
- **Croissante** = l'ordre est conservé, et la courbe monte de gauche à droite.
- Un **extremum** est une valeur de f , atteinte en un x : donner les deux.
- **Paire** : $f(-x) = f(x)$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- **Impaire** : $f(-x) = -f(x)$, symétrie par rapport à l'origine.