

COURS

Géométrie repérée — équation de droite et distance

2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

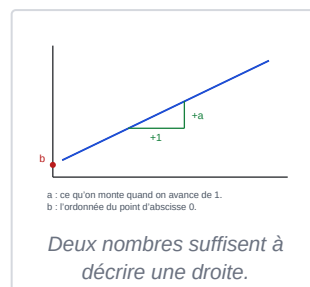
Poser un repère sur le plan transforme la géométrie en calcul. Une droite devient une équation, un parallélisme devient une égalité, une perpendicularité devient un produit qui vaut -1 . Ce qui se démontrait à la règle et au compas se vérifie désormais en trois lignes — et surtout, se vérifie **sans dessin**, donc sans risque de se fier à une apparence.

1 L'équation d'une droite

DÉFINITION

Toute droite non verticale a une équation de la forme $y = ax + b$. Le nombre a est le **coefficient directeur**, encore appelé **pente** de la droite : c'est ce dont on monte quand on avance de 1. Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** : c'est l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse vaut 0. Une droite **verticale** n'entre pas dans ce cadre : son équation est de la forme $x = k$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



TROUVER L'ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS

- ① Le **coefficient directeur** : différence des ordonnées divisée par différence des abscisses, dans le même ordre pour les deux.
- ② L'**ordonnée à l'origine** : on remplace x et y par les coordonnées de l'un des deux points dans $y = ax + b$, puis on isole b .
- ③ La **vérification** : on teste l'autre point, celui qui n'a pas servi. S'il ne tombe pas juste, l'erreur est dans le calcul.
ce contrôle est gratuit et attrape presque toutes les erreurs de signe.

EXEMPLE

Équation de la droite passant par $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$.

- ① Le coefficient directeur.
 $a = \frac{8-2}{3-1} = 3$
- ② On remplace avec le point A : $2 = 3 \times 1 + b$.
 $b = 2 - 3 = -1$
- ③ L'équation est donc $y = 3x - 1$.
- ④ Vérification avec B , resté inutilisé.
 $3 \times 3 - 1 = 8$
c'est bien l'ordonnée de B .

$y = 3x - 1$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Calculer a en divisant la différence des abscisses par celle des ordonnées. — on obtient l'inverse du coefficient cherché — ici $\frac{1}{3}$ au lieu de 3 — et rien dans le résultat ne signale l'erreur : c'est un nombre parfaitement plausible.

Le réflexe : se dire la formule en français : « de combien monte-t-on quand on avance de 1 ». La montée est au numérateur.

2 Parallèles et perpendiculaires

PROPRIÉTÉ

Deux droites non verticales sont **parallèles** si et seulement si elles ont le **même coefficient directeur**. Elles sont **perpendiculaires** si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 . Dans ce second cas, chacun est l'opposé de l'inverse de l'autre.

$$(d) \parallel (d') \iff a = a' \quad (d) \perp (d') \iff a \times a' = -1$$

La condition $a \times a' = -1$ se retient mieux sous sa forme pratique : si $a = 3$, alors $a' = -\frac{1}{3}$. On **inverse** la fraction et on **change le signe**. Le cas $a = 1$ donne $a' = -1$: les deux diagonales d'un carré, ce qui se vérifie d'un coup d'œil sur un quadrillage.

3 Distances et milieux

PROPRIÉTÉ

Dans un **repère orthonormé** — et seulement dans ce cas — la distance entre deux points se calcule par le théorème de Pythagore appliqué aux différences de coordonnées. Le milieu, lui, se calcule dans n'importe quel repère : c'est la moyenne des coordonnées.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE

Le triangle $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(-2; 5)$ est-il isocèle ? On travaille en repère orthonormé.

- ① Premier côté.
 $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- ② Deuxième côté.
 $AC = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \approx 4,24$
- ③ Troisième côté.
 $BC = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} \approx 6,08$
- ④ Les trois longueurs sont deux à deux différentes : le triangle n'est pas isocèle.
comparer les carrés aurait suffi, et évité les racines : 25, 18 et 37.

le triangle est quelconque

Pour comparer des longueurs, il est souvent inutile d'extraire les racines : si $AB^2 \neq AC^2$, alors $AB \neq AC$, puisque la fonction racine conserve l'ordre. On gagne du temps et l'on évite les arrondis — donc les fausses égalités.

À VÉRIFIER

- Coefficient directeur : la différence des **ordonnées** au numérateur.
- Ai-je vérifié mon équation sur le point qui n'a pas servi à la trouver ?
- Parallèles : $a = a'$. Perpendiculaires : $a \times a' = -1$.
- La formule de distance suppose un repère **orthonormé** : l'énoncé le dit-il ?
- Pour comparer des longueurs, ai-je comparé les **carrés** ?
- Ma conclusion nomme-t-elle les points, avec une phrase ?

À RETENIR

- $y = ax + b$: a = ce qu'on monte en avançant de 1 : b = ordonnée en $x = 0$.
- $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ — les **ordonnées** au numérateur.
- Droite verticale : $x = k$, pas de coefficient directeur.
- **Parallèles** : $a = a'$ · **perpendiculaires** : $a \times a' = -1$.
- Distance : $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, en repère **orthonormé**.
- Milieu : moyenne des coordonnées, dans n'importe quel repère.
- Pour comparer des longueurs, comparer les **carrés** : pas de racines, pas d'arrondis.