

Nombres et calculs

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible

- ① a. 30 est le plus petit multiple commun de 6 et de 15.

$$-\frac{5}{30} - \frac{8}{30} = -\frac{13}{30}$$
 13 est premier et ne divise pas 30 : la fraction est irréductible.
- ② b. On simplifie avant de multiplier : $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ et $\frac{35}{21} = \frac{5}{3}$.

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$$
 le produit est négatif : $B = -\frac{10}{9}$. Sans simplifier d'abord, il aurait fallu réduire $\frac{420}{378}$.
- ③ c. Le numérateur, seul.

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
- ④ Le dénominateur, seul.

$$\frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$
- ⑤ La grande barre est une division : on multiplie par l'inverse.

$$\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

$$C = \frac{4}{27}$$
- ⑥ d. Diviser par $\frac{9}{4}$, c'est multiplier par $\frac{4}{9}$.

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

$$D = -\frac{1}{6}$$
 — l'inverse de $\frac{9}{4}$ est $\frac{4}{9}$, et non $-\frac{9}{4}$.

2 Rappeler la définition d'un nombre décimal, puis dire si chacun en est un — en justifiant

- ① **Définition.** Un décimal s'écrit $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel : son écriture décimale s'arrête.
- ② **Le critère.** Une fraction irréductible est décimale si et seulement si son dénominateur ne contient que des facteurs 2 et 5.
- ③ a. $8 = 2^3$: rien d'autre que des 2.

$$\frac{3}{8} = 0,375$$
 décimal.
- ④ b. $12 = 2^2 \times 3$: le facteur 3 empêche l'écriture de s'arrêter.

$$\frac{7}{12} = 0,58333 \dots$$
 — rationnel, mais pas décimal.
- ⑤ c. π est irrationnel, et le diviser par 4 n'y change rien.
 ni décimal, ni même rationnel.
- ⑥ d. L'écriture trompe : $\sqrt{16} = 4$, donc le nombre vaut $\frac{4}{5}$.

$$\frac{4}{5} = 0,8$$
 décimal — on classe un nombre après l'avoir simplifié.
- ⑦ e. C'est exactement la forme de la définition.

$$\frac{5}{1000} = 0,005$$
 décimal.

3 Traduire — de l'inégalité vers l'intervalle, ou de l'intervalle vers l'inégalité

- ① a. $x \in [-2; 6]$ · b. $x > -3$
 en a, les deux bornes sont atteintes : deux crochets fermés. En b, le crochet ouvert donne une inégalité stricte.
- ② c. $x \in]-5; 0[$ · d. $x \leq 4$
 aucune borne atteinte en c ; en d, fermé sur 4 et ouvert sur l'infini — comme toujours.
- ③ e. $x \in [1; 7[$ · f. $x \geq 0$
 un crochet de chaque sorte en e, dans l'ordre où les inégalités se lisent ; en f, 0 est atteint, $+\infty$ jamais.
- ④ g. $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$ · h. $-6 < x \leq 2$
 une borne n'a aucune raison d'être entière ; et le crochet ouvert donne le strict, le fermé le large.

4 Déterminer l'intersection et la réunion de chaque paire d'intervalles

- ① On trace les deux intervalles l'un au-dessus de l'autre : l'intersection est la zone couverte **deux fois**, la réunion celle qui l'est **au moins une fois**.
 - ② a. $I \cap J = [-3; 5[$ et $I \cup J =] - \infty; 8]$
5 appartient à I mais pas à J : il sort de l'intersection, dont le crochet s'ouvre.
 - ③ b. $K \cap L = \emptyset$ et $K \cup L = \mathbb{R}$
2 est dans L seul ; et aucun réel n'échappe aux deux à la fois.
 - ④ c. $M \cap N = \emptyset$ et $M \cup N =] - 1; 3[\cup [4; 9]$
entre 3 et 4 il n'y a personne : la réunion garde son symbole et n'est pas un intervalle.
 - ⑤ d. $P \cap Q = [2; 6] = Q$ et $P \cup Q = [0; 10] = P$
 Q est inclus dans P : l'intersection est le petit, la réunion le grand.
-

5 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible

- ① On cherche le **plus grand** carré parfait qui divise le nombre : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.
 - ② a. $32 = 16 \times 2$ · b. $75 = 25 \times 3$
 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
 - ③ c. $48 = 16 \times 3$ · d. $98 = 49 \times 2$
 $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$
s'arrêter à $2\sqrt{12}$ en c serait juste, mais pas simplifié.
 - ④ e. $200 = 100 \times 2$ · f. $72 = 36 \times 2$
 $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
en f, $72 = 4 \times 18$ fonctionne aussi mais laisse du travail : 18 contient encore le carré 9.
-

6 Écrire sans racine au dénominateur

- ① On multiplie haut et bas par la racine du dénominateur : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, et la valeur ne change pas puisqu'on multiplie par 1.
 - ② a.
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 - ③ b.
 $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
 - ④ c. Au numérateur, $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{21}$.
 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$
 - ⑤ d. On simplifie la racine d'abord : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
 $\frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
simplifier avant de rationaliser fait ici disparaître la fraction entière.
 - ⑥ e. $\sqrt{10} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$, donc $\sqrt{5}$ se simplifie.
 $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
-

7 Simplifier sous la forme d'une seule puissance de a (avec $a \neq 0$)

- ① a. Produit de même base : les exposants s'additionnent.
 $-4 + 7 = 3$
 $A = a^3$.
- ② b. Quotient : les exposants se soustraient — et soustraire -2 , c'est ajouter 2.
 $5 - (-2) = 7$
 $B = a^7$.
- ③ c. Le numérateur : $(a^2)^{-2} = a^{-4}$, donc on additionne.
 $-3 + (-4) = -7$
- ④ Le dénominateur, en se souvenant que $a = a^1$.
 $-4 + 1 = -3$
- ⑤ Enfin le quotient.
 $-7 - (-3) = -4$
 $C = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$.
- ⑥ d. $(a^3)^{-2} = a^{-6}$, et $a^5 \times a^{-1} = a^4$.
 $-6 + 4 = -2$
 $D = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.
-

8 Donner la valeur exacte de chaque nombre

- ① a. $(3^2)^2 = 3^4$: une puissance de puissance multiplie les exposants.
 $3 - 5 + 4 = 2$
 $E = 3^2 = 9$.
- ② b. Tout se ramène à la base 2 : $16 = 2^4$ et $4^2 = 2^4$.
- ③ Numérateur, puis dénominateur.
 $-3 + 4 + 5 = 6$
- ④ Le dénominateur.
 $4 - 1 = 3$
 $F = 2^{6-3} = 2^3 = 8$.
- ⑤ c. $100 = 10^2$; on soustrait l'exposant du dénominateur à celui du numérateur.
 $(7 - 3) - (2 - 4) = 6$
 $G = 10^6$.
- ⑥ d.
 $-2 + 4 - 3 = -1$
 $H = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ — l'exposant négatif inverse, il ne rend pas négatif.
-

9 Une seule de ces quatre égalités est vraie. Laquelle, et pourquoi les trois autres sont-elles fausses ?

- ① La seule vraie est la c. Un quotient soustrait les exposants.
 $-4 - 7 = -11$
- ② a est fausse. $\frac{1}{30^3} = 30^{-3}$, donc le produit vaut $30^{1+(-3)}$.
 $1 - 3 = -2$
 30^{-2} , et non 30^3 .
- ③ b est fausse. Une puissance de puissance multiplie les exposants.
 $-2 \times 4 = -8$
 3^{-8} , et non 3^{-6} .
- ④ d est fausse. Bases différentes, exposant commun : ce sont les bases qui se multiplient, et l'exposant ne bouge pas.
 $2 \times 7 = 14$
 14^{-5} , et non 14^{-10} .
- ⑤ Trois règles, trois pièges : additionner, multiplier, regrouper les bases. Ce qui est évalué ici, c'est le choix de la règle, pas le calcul.
-

10 Un carré A a pour aire 200 cm², un carré B pour aire 50 cm²

- ① a. Le côté d'un carré est la racine carrée de son aire.
 $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
- ② Pour le carré B.
 $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
côtés exacts : $10\sqrt{2}$ cm et $5\sqrt{2}$ cm.
- ③ b. Oui, et c'est la forme exacte qui le montre d'un seul coup d'œil.
 $10\sqrt{2} = 2 \times 5\sqrt{2}$
avec les valeurs approchées 14,1 et 7,1 on n'aurait qu'une forte présomption, pas une démonstration.
- ④ c. Le rapport des aires.
 $\frac{200}{50} = 4$
le côté double, l'aire est multipliée par $2^2 = 4$: c'est la règle des agrandissements.
- ⑤ d. $\sqrt{2} \approx 1,414$.
 $10 \times 1,414 = 14,14$
environ 14,1 cm — une valeur approchée, à ne donner que parce que la question la réclame.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Donner la forme exacte quand elle est demandée	3 pts	Une valeur de calculatrice là où l'énoncé écrit « exacte »
Rendre chaque fraction irréductible, signe compris	3 pts	Un résultat juste laissé sous la forme $\frac{12}{72}$
Écrire les intervalles avec le bon crochet	4 pts	Un crochet fermé sur l'infini, ou une réunion disjointe écrite comme un intervalle
Extraire le plus grand carré parfait et rationaliser	4 pts	$2\sqrt{18}$ rendu tel quel, ou une racine laissée au dénominateur
Choisir la bonne règle de puissance	3 pts	Des exposants multipliés dans un produit de même base
Justifier, et pas seulement répondre	3 pts	« oui » ou « non » sans la raison, sur les questions de nature de nombre