

Nombres et calculs

Programme en vigueur : BO n° 14 du 2 avril 2026 — MENE2602914A

Rédigée sous Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

La seconde ne demande pas de nouveaux calculs : elle demande les mêmes, **exacts**. Au collège, 14,1 passait pour une réponse ; ici la réponse est $10\sqrt{2}$, et 14,1 n'en est une que si l'énoncé écrit « au dixième ». Six outils — fraction, ensemble, intervalle, racine, puissance, réunion — et un seul réflexe : nettoyer l'écriture avant de calculer.

RECONNAÎTRE EN DIX SECONDES

- ① **Le signal.** Regardez le symbole, pas l'énoncé : une **barre de fraction**, un **radical**, un **exposant**, un **crochet**. Chacun appelle un geste différent, et le nommer à voix basse suffit à ne pas se tromper de chapitre.
- ② **La première question à se poser :** l'énoncé veut-il une valeur **exacte** ou une valeur **approchée** ? « Donner la valeur exacte », « écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ » interdisent le résultat de la calculatrice ; « au dixième », « à 10^{-2} près » l'exigent. Une réponse juste dans le mauvais registre ne vaut rien.
- ③ **Le contre-signal.** Le mot « **et** » commande une intersection, le mot « **ou** » une réunion — c'est le français qui décide du symbole, jamais l'inverse. Et une réponse n'est pas finie tant qu'il reste une racine au dénominateur ou un facteur commun dans une fraction.
- ④ **Le réflexe qui économise l'exercice.** Avant le premier calcul, ramener chaque écriture à sa forme la plus simple : fraction irréductible, plus grand carré parfait sorti du radical, toutes les puissances sur une seule base. La plupart des calculs de ce chapitre deviennent courts une fois les écritures nettoyées — et longs si on ne le fait pas.

1 Les ensembles de nombres, et le mot « exact »

DÉFINITION

Un nombre est **décimal** lorsqu'il peut s'écrire comme un entier relatif divisé par une puissance de 10 — autrement dit lorsque son écriture décimale **s'arrête**.

$$x \in \mathbb{D} \iff x = \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

RÈGLE

Le critère qui décide en trois secondes. On rend la fraction **irréductible**, puis on regarde son dénominateur : il est décimal si et seulement si ce dénominateur ne contient que des facteurs **2** et **5**. Un 3, un 7, un 11 au dénominateur, et l'écriture ne s'arrête jamais.

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} \in \mathbb{D} \quad \frac{7}{12} = \frac{7}{2^2 \times 3} \notin \mathbb{D}$$

N 0 · 7

Z -5

D 0,75

Q $\frac{2}{3}$

R $\sqrt{2} \cdot \pi$

$\mathbb{N}$ les entiers naturels, $\mathbb{Z}$ les relatifs, $\mathbb{D}$ les décimaux, $\mathbb{Q}$ les rationnels, $\mathbb{R}$ tous les réels — chacun contient le précédent.

L'écriture n'est pas le nombre. $\sqrt{16}$ a l'air irrationnel et vaut 4 ; $\frac{6}{3}$ a l'air d'une fraction et vaut 2 ; 0,5 a l'air décimal et l'est, tout comme $\frac{1}{2}$ qui est le même nombre. On classe un nombre après l'avoir simplifié, jamais sur sa première écriture.

2 Fractions : quatre gestes

LES QUATRE GESTES, DANS L'ORDRE OÙ ON EN A BESOIN

- 1 **Additionner ou soustraire** : même dénominateur obligatoire. On prend le plus petit multiple commun, on multiplie chaque fraction par ce qui lui manque, puis on additionne **les numérateurs seulement**.
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{7}{30}$.
- 2 **Multiplier** : numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux — mais **simplifier en croix d'abord**. C'est la seule façon de ne jamais manipuler de grands nombres.
 $\frac{12}{18} \times \frac{35}{21}$ se simplifie en $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$ avant tout calcul.
- 3 **Diviser** : on multiplie par l'**inverse**. Diviser par $\frac{9}{4}$, c'est multiplier par $\frac{4}{9}$ — et jamais par $-\frac{9}{4}$: l'inverse n'est pas l'opposé.
- 4 **Une fraction étagée** est une division déguisée. On calcule le numérateur, on calcule le dénominateur, et seulement alors on divise l'un par l'autre. Trois lignes, jamais une.

EXEMPLE

Calculer $C = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{5}{4} + 1}$.

- 1 Le numérateur, seul.
 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- 2 Le dénominateur, seul.
 $\frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$
- 3 La grande barre est une division : on multiplie par l'inverse.
 $\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$
4 et 27 n'ont aucun diviseur commun : la fraction est irréductible.

$C = \frac{4}{27}$

Le signe se porte une seule fois. $\frac{-3}{8}$, $\frac{3}{-8}$ et $-\frac{3}{8}$ sont le même nombre ; écrivez toujours la troisième forme. Deux signes moins qui se promènent dans une même expression finissent toujours par se perdre.

3 Intervalles : traduire une inégalité

DÉFINITION

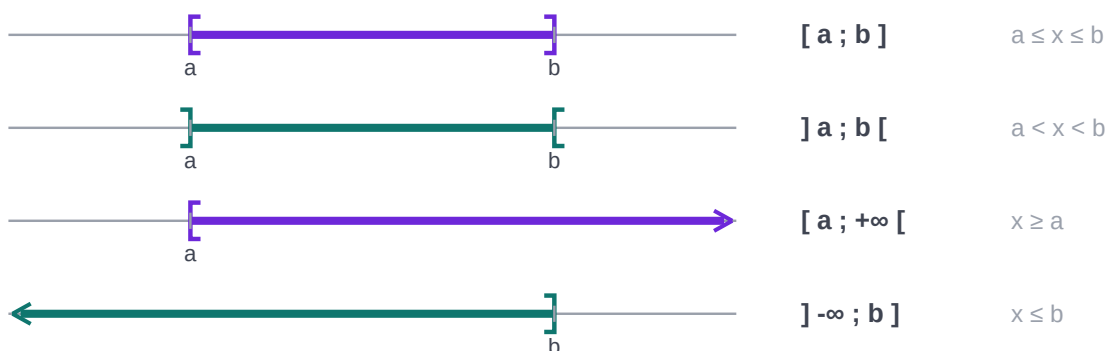
Un **intervalle** est l'ensemble de tous les réels compris entre deux bornes. Le crochet **tourné vers l'intérieur** ferme l'intervalle : la borne appartient à l'ensemble. Tourné vers l'extérieur, il l'ouvre : la borne est exclue.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

RÈGLE

Le **crochet qui borde l'infini est toujours ouvert**. $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres : aucun réel ne les atteint, donc aucune borne ne peut être fermée sur eux.

$$x \geq 2 \iff x \in [2; +\infty[$$



Les quatre formes, et l'inégalité que chacune traduit. Le sens du crochet se lit sur le dessin avant de s'écrire.

Deux ensembles n'ont pas de bornes et reviennent tout le temps : l'ensemble vide $\emptyset$, quand aucun réel ne convient, et $\mathbb{R}$ tout entier, qui s'écrit aussi $] -\infty; +\infty[$. Répondre $\emptyset$ est une réponse, pas un aveu d'échec.

4 Intersection et réunion

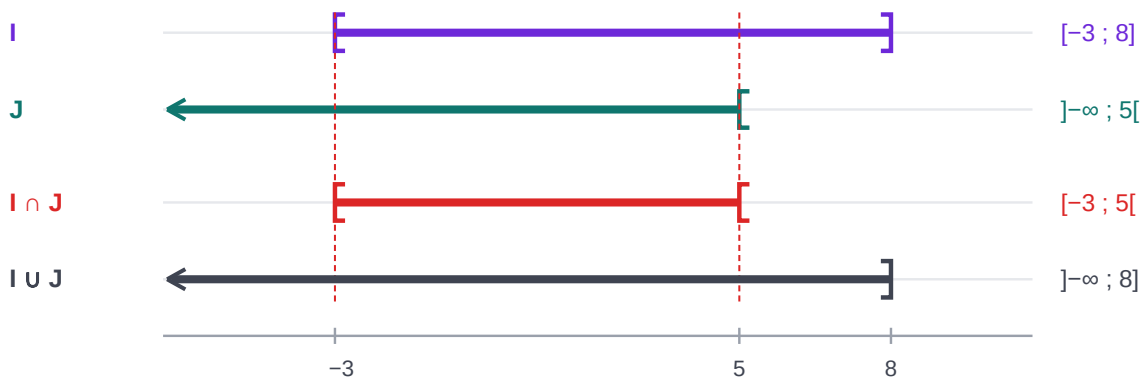
DÉFINITION

$A \cap B$ — lire « A **inter** B » — rassemble les réels qui sont dans A **et** dans B. $A \cup B$ — « A **union** B » — rassemble ceux qui sont dans A **ou** dans B, le « ou » étant inclusif : être dans les deux suffit largement.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

LA DROITE À DEUX ÉTAGES

- 1 **Tracer les deux intervalles l'un au-dessus de l'autre**, sur une seule droite graduée, avec les mêmes repères verticaux. Tout le reste se lit ; rien ne se calcule.
- 2 **L'intersection est la zone couverte deux fois**. On descend un trait vertical à chaque borne : la zone commune saute aux yeux, et les bornes de l'intersection sont les bornes **intérieures**.
- 3 **La réunion est la zone couverte au moins une fois**. Si les deux zones se touchent ou se chevauchent, la réunion est un intervalle. Si elles sont séparées par un trou, la réunion garde le symbole $\cup$ et reste en deux morceaux.
- 4 **Vérifier une borne litigieuse en y mettant le nombre**. Pour $I = [-3; 8]$ et $J =]-\infty; 5[$: le nombre 5 est-il dans les deux ? Il est dans I , pas dans J — donc hors de l'intersection, dont le crochet se ferme juste avant.



Les deux traits rouges marquent les bornes qui décident. L'intersection s'arrête avant 5, la réunion va jusqu'à 8.

Une réunion n'est pas toujours un intervalle. $] - 1; 3[\cup [4; 9]$ ne peut pas s'écrire $] - 1; 9]$: le nombre 3,5 appartiendrait à la seconde écriture et à aucun des deux ensembles de départ. Quand un trou sépare les deux, le symbole $\cup$ fait partie de la réponse.

5 Racines carrées : sortir ce qui peut sortir

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (et $b > 0$ pour le quotient), la racine **traverse les produits et les quotients** — et elle seulement eux.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

ÉCRIRE SOUS LA FORME $A\sqrt{B}$

- 1 **Chercher le plus grand carré parfait qui divise le nombre**. Les seuls à connaître par cœur : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.
- 2 **Découper, puis sortir**. $\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$. Le carré sort en prenant sa racine ; le reste demeure sous le radical.
- 3 **Contrôler qu'on ne peut plus rien sortir**. $\sqrt{72} = 2\sqrt{18}$ est juste mais inachevé : 18 contient encore le carré 9. La forme attendue est $6\sqrt{2}$.
en cas de doute, décomposer en facteurs premiers et sortir les paires.

FAIRE DISPARAÎTRE LA RACINE DU DÉNOMINATEUR

- ① **Simplifier la racine d'abord**, si elle peut l'être : $\frac{6}{\sqrt{12}}$ devient $\frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, ce qui raccourcit tout ce qui suit.
- ② **Multiplier haut et bas par la racine du dénominateur**. Elle se transforme en entier, puisque $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, et la valeur du quotient n'a pas bougé : on a multiplié par 1.
 $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- ③ **Simplifier la fraction obtenue**. $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$: la fraction disparaît complètement, et c'est souvent le signe qu'on a bien travaillé.

On additionne des racines comme on additionne des x . $5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$: c'est une réduction de termes semblables, rien de plus. Mais $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne se réduit pas — les radicandes diffèrent, comme x et y .

6 Puissances : une seule base, un seul exposant

PROPRIÉTÉ

Pour $a \neq 0$ et des exposants entiers relatifs n et p . Les trois premières règles ne valent qu'entre puissances de **même base** ; la dernière, au contraire, exige le **même exposant**.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a^n)^p = a^{np} \quad a^n \times b^n = (ab)^n$$

PROPRIÉTÉ

Les trois valeurs qu'on oublie, et qui font perdre des points à elles seules.

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EXEMPLE

Simplifier $F = \frac{2^{-3} \times 16 \times 2^5}{4^2 \times 2^{-1}}$.

- ① Tout ramener à la base 2 : $16 = 2^4$ et $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$.
tant que deux bases différentes cohabitent, aucune règle ne s'applique.
- ② Le numérateur : on additionne les exposants.
 $-3 + 4 + 5 = 6$
- ③ Le dénominateur, de même.
 $4 - 1 = 3$
- ④ Le quotient : on soustrait.
 $6 - 3 = 3$

$$\underline{F = 2^3 = 8}$$

La **notation scientifique** est la même règle, appliquée à 10 : un seul chiffre non nul avant la virgule, multiplié par une puissance de 10. $58\,300 = 5,83 \times 10^4$. Elle sert à comparer : entre 9×10^4 et 2×10^5 , c'est l'**exposant** qui tranche en premier, et le nombre de devant seulement en cas d'égalité.

7 Les pièges qui coûtent des points

PIÈGE

Écrire $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. — la racine traverse les **produits** et les **quotients**, jamais les sommes. Ici $9 + 16 = 25$ et $\sqrt{25} = 5$, pas 7. C'est l'erreur la plus fréquente de la seconde, et elle revient à chaque calcul de distance.

Ce que ça coûte : la question, et derrière elle toutes les distances et toutes les normes du chapitre de géométrie repérée.

Le réflexe : devant une somme sous le radical, on calcule **d'abord** la somme, et on n'ouvre la racine qu'ensuite. Un seul contre-exemple, retenu une fois, suffit à ne plus jamais se tromper.

PIÈGE

Simplifier $\frac{3+x}{3}$ en x . — on ne simplifie que des **facteurs**, jamais des termes d'une somme. Avec $x = 3$, l'expression de départ vaut $\frac{6}{3} = 2$ quand la prétendue simplification en donne 3.

Ce que ça coûte : la question entière, et le correcteur voit l'erreur à la ligne où elle est écrite.

Le réflexe : avant de barrer quoi que ce soit, vérifier qu'on voit un **produit** en haut et en bas. Pas de produit, pas de simplification — il faut d'abord factoriser.

PIÈGE

Écrire $x \geq 2 \iff x \in [2; +\infty]$.

— $+\infty$ n'est pas un nombre : aucun réel ne l'atteint, donc le crochet qui le borde ne peut pas se fermer. L'écriture correcte est $[2; +\infty[$.

Ce que ça coûte : un point de notation, retiré à chaque occurrence : sur un exercice à huit questions, l'addition est lourde.

Le réflexe : un crochet se ferme sur une valeur **atteinte**. L'infini n'en est pas une — jamais, dans aucun exercice.

PIÈGE

Écrire $] - 1; 3[\cup [4; 9] =] - 1; 9]$.

— le nombre 3,5 appartiendrait au résultat sans appartenir à aucun des deux ensembles de départ. Deux intervalles séparés par un trou se réunissent en une écriture **à deux morceaux**, qui n'est pas un intervalle.

Ce que ça coûte : la question, et la suivante si elle s'appuie sur l'ensemble trouvé.

Le réflexe : tracer les deux sur la même droite graduée. S'il reste un espace entre eux, le symbole $\cup$ fait partie de la réponse et n'a pas à disparaître.

PIÈGE

Écrire $2^3 \times 2^5 = 2^{15}$, ou $2^3 \times 3^3 = 6^9$. — deux erreurs symétriques. Même **base**, les exposants s'**additionnent** : $2^3 \times 2^5 = 2^8 = 256$, quand $2^{15} = 32\,768$. Même **exposant**, ce sont les **bases** qui se multiplient : $2^3 \times 3^3 = 6^3 = 216$.

Ce que ça coûte : la question, et l'erreur se reproduit mécaniquement sur toutes les lignes du même type.

Le réflexe : chercher ce qui est commun **avant** de choisir la règle. Base commune, on touche aux exposants ; exposant commun, on touche aux bases. Jamais les deux à la fois.

PIÈGE

Conclure que $\frac{2}{7}$ n'est pas rationnel parce que l'écran affiche

0,285714285... — un rationnel a un développement décimal qui s'arrête **ou** se répète : ici le motif 285714 revient sans fin. Et $\frac{2}{7}$ est un quotient de deux entiers — rationnel avant même qu'on l'affiche.

Ce que ça coûte : la justification, qui est la totalité du point sur ce type de question — la réponse seule n'en rapporte aucun.

Le réflexe : la nature d'un nombre se lit sur son **écriture fractionnaire**, pas sur un écran. Une calculatrice affiche toujours douze décimales, pour $\frac{2}{7}$ comme pour π .

À VÉRIFIER

- L'énoncé demande-t-il une valeur **exacte** ou une valeur approchée ? Il le dit, et il ne dit jamais les deux.
- Ma fraction est-elle irréductible, et son signe écrit une seule fois, devant la barre ?
- Avant de multiplier deux fractions, ai-je simplifié en croix ?
- Le crochet qui borde $+\infty$ ou $-\infty$ est-il bien **ouvert** ?
- « Et » donne une intersection, « ou » une réunion : ai-je pris le symbole que la phrase commande ?
- Ai-je sorti du radical le **plus grand** carré parfait — $6\sqrt{2}$ et non $2\sqrt{18}$?
- Reste-t-il une racine au dénominateur ? Tant qu'il y en a une, la réponse n'est pas finie.
- Même base, j'additionne les exposants ; même exposant, je multiplie les bases. Et a^{-n} **inverse**, il ne rend pas négatif.

À RETENIR

- **Décimal** : fraction irréductible dont le dénominateur ne contient que des 2 et des 5.
- Une fraction étagée est une division : numérateur, dénominateur, **puis** on divise.
- Simplifier **avant** de multiplier deux fractions — jamais après.
- Le crochet qui borde $+\infty$ ou $-\infty$ est **toujours** ouvert.
- « Et » → intersection $\cap$. « Ou » → réunion $\cup$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, mais $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ — jamais sur une somme.
- Sortir du radical le **plus grand** carré parfait : $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
- Pas de racine au dénominateur : on multiplie haut et bas par cette racine.
- Même **base** → on additionne les exposants. Même **exposant** → on multiplie les bases.
- $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$: l'exposant négatif inverse, il ne rend pas négatif.