

Probabilités — modèles et calculs

2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Une probabilité ne prédit rien. Elle ne dit pas ce qui arrivera au prochain lancer : elle décrit ce qui arrive **à la longue**, sur un très grand nombre de répétitions. Toute la difficulté du chapitre tient dans cet écart entre une valeur théorique, calculée avant toute expérience, et une fréquence observée qui s'en approche sans jamais l'atteindre exactement.

1 Le vocabulaire, qui décide de tout

DÉFINITION

L'**univers** Ω est l'ensemble de toutes les **issues** possibles d'une expérience aléatoire : pour un dé, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers : « obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2; 4; 6\}$. Sa **probabilité** est la somme des probabilités des issues qui le composent.

RÈGLE

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité — on dit qu'il y a **équiprobabilité** —, la probabilité d'un événement se calcule en comptant. C'est le seul cas où cette formule s'applique, et l'énoncé doit toujours le garantir : dé équilibré, pièce non truquée, boules indiscernables au toucher.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues totales}}$$

PROPRIÉTÉ

Trois règles gouvernent tous les calculs. Toute probabilité est comprise entre 0 et 1. La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1. Enfin, l'événement **contraire** $\bar{A}$ complète à 1 : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Cette dernière propriété est la plus rentable — dès qu'un énoncé contient « au moins un », c'est le contraire qu'il faut calculer.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2 Réunion et intersection

RÈGLE

L'événement $A \cup B$ (« **A ou B** ») est réalisé si l'un au moins des deux l'est. L'événement $A \cap B$ (« **A et B** ») l'est si les deux le sont ensemble. Leur relation est une formule d'addition corrigée : on additionne, puis on retire ce qu'on a compté deux fois.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. A : « obtenir un nombre pair ». B : « obtenir un multiple de 3 ». Calculer $P(A \cup B)$.

- ① $A = \{2; 4; 6\}$, donc trois issues favorables sur six.

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$$

- ② $B = \{3; 6\}$, donc deux issues.

$$P(B) = \frac{2}{6} \approx 0,33$$

- ③ $A \cap B = \{6\}$: le 6 est à la fois pair et multiple de 3.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

- ④ On applique la formule.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

- ⑤ Contrôle par le dénombrement direct : $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$, soit quatre issues sur six.

les deux méthodes concordent, ce qui valide le calcul.

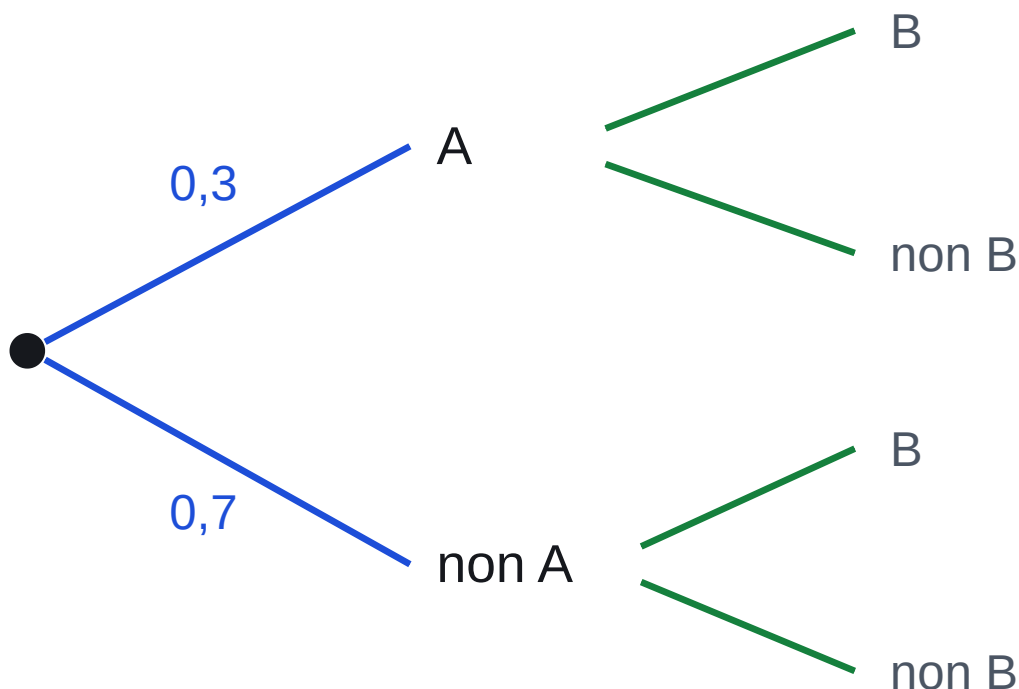
$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} \approx 0,67$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **sans vérifier l'intersection**. — l'addition simple ne vaut que pour des événements **incompatibles**, c'est-à-dire d'intersection vide. Ici elle donnerait $\frac{5}{6}$ au lieu de $\frac{4}{6}$: le 6, compté deux fois, explique exactement l'écart d'un sixième.

Le réflexe : avant d'additionner, écrire l'intersection en extension. Si elle est vide, l'addition est licite ; sinon, il faut retrancher.

3 Les arbres et les expériences à deux étapes



le long d'un chemin on multiplie ; entre chemins on additionne.

Deux niveaux, quatre chemins, et une somme qui doit valoir 1.

CONSTRUIRE ET LIRE UN ARBRE

- 1 **Un niveau par étape** de l'expérience. Les branches issues d'un même nœud portent toutes les issues possibles à cette étape.
- 2 **Écrire une probabilité sur chaque branche**. À chaque nœud, leur somme vaut 1 : c'est le premier contrôle, et il attrape la plupart des erreurs.
- 3 **Multiplier le long d'un chemin** pour obtenir la probabilité d'une issue composée — les deux conditions doivent être remplies ensemble.
- 4 **Additionner entre les chemins** qui conviennent, et vérifier que la somme de tous les chemins vaut 1.
un arbre dont les chemins ne totalisent pas 1 contient nécessairement une erreur.

Lorsque l'expérience se fait **avec remise**, les deux étapes sont **indépendantes** : les probabilités du second niveau sont les mêmes sur toutes les branches. **Sans remise**, elles changent selon ce qui s'est produit avant — et l'arbre devient le seul outil praticable. Les probabilités portées au second niveau sont alors des probabilités **conditionnelles**, notées $P_A(B)$: la probabilité de B sachant que A est réalisé.

4 De la théorie à l'expérience

RÈGLE

Loi des grands nombres — lorsqu'on répète une expérience un très grand nombre de fois, la **fréquence** observée d'un événement se rapproche de sa **probabilité**. C'est le pont entre le calcul et le réel : il justifie qu'on estime une probabilité inconnue par une fréquence, et qu'on teste un modèle en comparant ses prévisions à des relevés.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Croire qu'après cinq « pile » d'affilée, « face » devient plus probable. — la pièce n'a pas de mémoire. La probabilité du prochain lancer reste $\frac{1}{2}$, quels que soient les résultats précédents. La loi des grands nombres ne compense pas le passé : elle le **noie** dans un très grand nombre de lancers ultérieurs.

Le réflexe : se demander si l'objet peut se souvenir. Un dé, une pièce, une roulette : non. Un tirage sans remise : oui, et c'est alors une tout autre situation.

EXEMPLE

Dans un lycée, 60 % des élèves sont externes. Parmi les externes, 40 % font du sport en club ; parmi les internes, 70 %. Quelle est la probabilité qu'un élève pris au hasard fasse du sport en club ?

- ① L'énoncé décrit une expérience à deux étapes : le statut, puis la pratique. C'est un arbre à deux niveaux.
- ② Premier chemin : externe **et** sportif.
 $0,6 \times 0,4 = 0,24$
- ③ Second chemin : interne **et** sportif, sachant que 40 % des élèves sont internes.
 $0,4 \times 0,7 = 0,28$
- ④ Deux chemins mènent au sport : on les additionne.
 $0,24 + 0,28 = 0,52$
- ⑤ Contrôle : les quatre chemins de l'arbre doivent totaliser 1. Les deux autres valent $0,6 \times 0,6 = 0,36$ et $0,4 \times 0,3 = 0,12$.
 $0,52 + 0,36 + 0,12 = 1$
l'arbre est complet et cohérent.

environ 52 % des élèves font du sport en club

À VÉRIFIER

- L'énoncé garantit-il l'**équiprobabilité** avant que j'applique la formule de comptage ?
- Ai-je écrit l'univers en extension quand il est petit ?
- Avant d'additionner deux probabilités : l'intersection est-elle vide ?
- « Au moins un » : ai-je pensé à l'événement **contraire** ?
- Sur un arbre : la somme des branches d'un nœud vaut-elle 1 ?
- Chaque probabilité annoncée est-elle comprise entre 0 et 1 ?

À RETENIR

- **Univers** Ω : toutes les issues · **événement** : un sous-ensemble de Ω .
- Équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{favorables}}{\text{total}}$ — et l'énoncé doit la garantir.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$: le réflexe dès qu'on lit « au moins un ».
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ — additionner seul suppose l'intersection vide.
- Sur un arbre : **multiplier** le long d'un chemin, **additionner** entre les chemins.
- Avec remise = indépendance. Sans remise = probabilités conditionnelles.
- La pièce n'a pas de mémoire : cinq piles ne rendent pas face plus probable.