

Vecteurs, translations et repérage dans le plan

2^{de}

Programme de seconde générale et technologique — BO spécial n°1 du 22 janvier 2019

Un vecteur n'est pas une flèche : c'est un **déplacement**. La flèche n'en est qu'un dessin parmi une infinité — le même vecteur peut être représenté n'importe où dans le plan, pourvu qu'on conserve la direction, le sens et la longueur. Comprendre cela règle d'avance la moitié des difficultés du chapitre, à commencer par l'égalité de deux vecteurs qui ne se touchent pas.

1 Trois caractéristiques

DÉFINITION

Un **vecteur** $\vec{u}$ est défini par trois données : une **direction** — celle d'une droite —, un **sens** — l'un des deux parcours possibles sur cette droite — et une **norme** $\|\vec{u}\|$, sa longueur. Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont ces trois caractéristiques en commun, quelle que soit leur position dans le plan. Le vecteur $\vec{AB}$ désigne le déplacement qui mène de A à B .

Direction et sens ne sont pas synonymes, et l'usage courant les confond. Deux vecteurs horizontaux ont la **même direction** ; l'un peut aller vers la droite et l'autre vers la gauche, ils ont alors des **sens opposés**. C'est exactement la relation entre $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$, qui vérifient $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

PROPRIÉTÉ

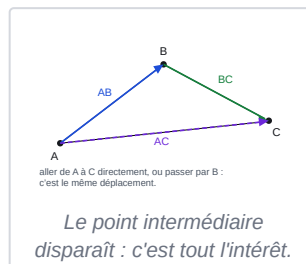
$ABDC$ est un **parallélogramme** si et seulement si $\vec{AB} = \vec{CD}$. C'est la traduction vectorielle d'une figure du collège, et c'est souvent la façon la plus rapide de démontrer qu'un quadrilatère en est un : une égalité de vecteurs remplace deux démonstrations de parallélisme.

2 Additionner des déplacements

PROPRIÉTÉ

Relation de Chasles — pour trois points quelconques A , B et C , aller de A à C revient à passer par B . La relation est vraie même si B n'est pas entre les deux, et même si les trois points sont alignés.

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



Chasles se lit dans les deux sens, et le second usage est le plus utile : on peut **introduire** un point pour couper un vecteur en deux. Ainsi $\vec{AC}$ devient $\vec{AO} + \vec{OC}$ si le point O arrange le calcul. C'est la manœuvre standard des démonstrations vectorielles.

3 Coordonnées

RÈGLE

Dans un repère, le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées la différence des coordonnées de B et de A , **dans cet ordre** : arrivée moins départ. Sa norme se calcule alors par le théorème de Pythagore, et le milieu d'un segment par la moyenne des coordonnées.

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE

Avec $A(1; 2)$ et $B(4; 6)$: coordonnées de $\vec{AB}$, sa norme, et le milieu de $[AB]$.

① Les coordonnées : arrivée moins départ.

$$4 - 1 = 3$$

② Puis l'ordonnée.

$$6 - 2 = 4$$

$$\vec{AB}(3; 4).$$

③ La norme, par Pythagore.

$$3^2 + 4^2 = 25$$

④ On prend la racine.

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\|\vec{AB}\| = 5.$$

⑤ Le milieu, par la moyenne des coordonnées.

$$\frac{1+4}{2} = 2,5$$

⑥ Puis l'ordonnée du milieu.

$$\frac{2+6}{2} = 4$$

le milieu est $M(2,5; 4)$.

$\vec{AB}(3; 4)$, de norme 5, et $M(2,5; 4)$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Calculer $\vec{AB}$ en faisant départ moins arrivée. — on obtient alors $\vec{BA}$, c'est-à-dire le vecteur opposé. La norme reste juste — elle ne dépend pas du sens — mais toute la suite du raisonnement est inversée.

Le réflexe : se dire la formule à voix basse : « arrivée moins départ ». Et contrôler sur le dessin : si le vecteur va vers la droite, sa première coordonnée est positive.

4 Colinéarité

DÉFINITION

Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils ont la même direction — autrement dit si l'un est un multiple de l'autre. Le critère de calcul est le **déterminant** : $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$. Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$$

La colinéarité est l'outil qui traduit deux propriétés géométriques en un seul calcul. Trois points A, B, C sont **alignés** si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ le sont. Dans les deux cas, un déterminant remplace une démonstration.

À VÉRIFIER

- Coordonnées d'un vecteur : **arrivée moins départ**, dans cet ordre.
- Ai-je distingué **direction** et **sens** dans ma rédaction ?
- Chasles : puis-je introduire un point pour simplifier ?
- Norme : ai-je élevé au carré **avant** d'additionner ?
- Alignement ou parallélisme : ai-je conclu par un **déterminant nul** ?
- Ma conclusion est-elle une phrase, avec les points nommés ?

À RETENIR

- Un vecteur = **direction + sens + norme**. Sa position dans le plan n'importe pas.
- $\vec{BA} = -\vec{AB}$: même direction, sens opposé.
- **Chasles** : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ — et on peut **introduire** un point.
- Coordonnées : **arrivée moins départ**.
- Norme : $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ · milieu : moyenne des coordonnées.
- **Colinéaires** $\Leftrightarrow$ déterminant $xy' - x'y = 0$.
- Alignement et parallélisme se démontrent tous deux par un déterminant nul.