

COURS

Calcul littéral — Développement et factorisation

3^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Développer et factoriser sont deux chemins opposés entre les **mêmes** expressions. On développe pour calculer, on factorise pour résoudre : une équation ne se résout qu'une fois l'expression écrite en produit. C'est l'outil qui prépare le second degré, et il tombe presque à chaque brevet.

1 Développer : de la forme produit à la forme somme

RÈGLE

Double distributivité — chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

EXEMPLE

Développer $(x + 3)(x + 5)$.

① Je multiplie chaque terme du premier facteur par chaque terme du second.

$$x \times x + x \times 5 + 3 \times x + 3 \times 5$$

② Je réduis les termes semblables : $5x$ et $3x$ s'additionnent.

$$x^2 + 8x + 15$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. — il manque le double produit. Sur un carré de côté $a + b$, le découpage montre quatre morceaux et non deux : deux carrés, et **deux rectangles identiques**.

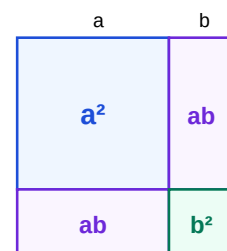
Le réflexe : tester avec des nombres avant de conclure. Avec $a = 3$ et $b = 4$: $(3 + 4)^2 = 49$, tandis que $9 + 16 = 25$. Un contre-exemple suffit à trancher.

2 Les trois identités remarquables

RÈGLE

Ce sont trois développements si fréquents qu'on les reconnaît au lieu de les refaire :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$(a + b)^2$: deux carrés et deux rectangles ab — d'où le double produit.

EXEMPLE

Elles servent aussi au calcul mental. Pour 101^2 , on écrit $101 = 100 + 1$.

① On applique la première identité.

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

② Pour un produit de la forme $(a - b)(a + b)$, la troisième identité évite toute multiplication posée.

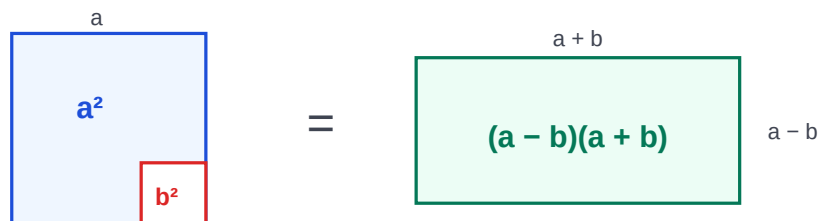
$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = 10000 - 4 = 9996$$

les identités sont d'abord des outils de calcul

3 Factoriser : de la forme somme à la forme produit

DEUX CHEMINS, DANS CET ORDRE

- ① **Je cherche d'abord un facteur commun.** Dans $6x^2 + 9x$, les deux termes contiennent $3x$: l'expression devient $3x(2x + 3)$.
- ② **Sinon, je cherche une identité remarquable.** Trois termes évoquent un carré, deux termes séparés par un moins évoquent une différence de carrés.
- ③ Une différence de carrés se reconnaît à deux carrés parfaits séparés par un signe moins.
 $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$
- ④ Et la forme factorisée donne le même résultat, sans passer par les carrés.
 $(7 - 5) \times (7 + 5) = 2 \times 12 = 24$



La surface ne change pas :
on l'a seulement redécoupée.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : \text{deux écritures de la même aire.}$$

Le facteur commun se cherche **toujours en premier** : il simplifie souvent l'expression au point de rendre l'identité évidente ensuite.

4 À quoi ça sert : résoudre

RÈGLE

Équation-produit — un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. C'est la seule raison pour laquelle on factorise avant de résoudre.

EXEMPLE

Résoudre $x^2 - 16 = 0$.

- ① On reconnaît une différence de carrés, puisque $16 = 4^2$.
- ② L'équation devient $(x - 4)(x + 4) = 0$.
- ③ Un produit nul annule l'un de ses facteurs : $x = 4$ ou $x = -4$.

deux solutions : 4 et -4

Sans factorisation, on n'a aucun moyen de résoudre : c'est la forme **produit** qui donne les solutions, jamais la forme somme.

À RETENIR

- **Développer** : du produit vers la somme. **Factoriser** : de la somme vers le produit.
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — le **double produit** est ce qu'on oublie.
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$: deux carrés séparés par un moins.
- Pour factoriser, chercher **le facteur commun d'abord**, l'identité ensuite.
- Un **produit nul** annule l'un de ses facteurs : c'est la seule raison de factoriser.
- On ne divise jamais par une inconnue — on perdrait une solution.