

Divisibilité et nombres premiers

3^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, ajusté au BO du 26 juillet 2018

Au brevet, ce chapitre arrive presque toujours déguisé : « le plus grand nombre de sachets identiques », « rendre la fraction irréductible », « peut-on partager sans qu'il en reste ». Le calcul, lui, est toujours le même — **décomposer en facteurs premiers**, puis diviser. Ce qui sépare une copie à tous les points d'une copie à la moitié, c'est **la phrase qui dit pourquoi on calcule ça** : « le nombre de sachets divise 144 et divise 180, et on le veut le plus grand possible. » Cette phrase vaut souvent plus que le résultat.

1 Le vocabulaire, et ce qu'il interdit

DÉFINITION

Un entier qui a **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même. Les premiers jusqu'à 31 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. **1 n'est pas premier** — il n'a qu'un seul diviseur. **2 est le seul premier pair**, puisque tout autre nombre pair est divisible par 2.

DÉFINITION

L'écriture d'un entier comme **produit de nombres premiers uniquement**. On divise par 2 tant que c'est possible, puis par 3, puis par 5, par 7... jusqu'à obtenir 1. Chaque facteur du produit final doit être premier : $120 = 2^3 \times 15$ n'est **pas** une décomposition, car 15 n'est pas premier. Cette écriture est **unique** à l'ordre des facteurs près : on la vérifie en refaisant le produit.

RÈGLE

Les critères de divisibilité, qui évitent de tâtonner. Par **2** : le chiffre des unités est pair. Par **3** : la somme des chiffres est divisible par 3. Par **5** : le nombre finit par 0 ou 5. Par **9** : la somme des chiffres est divisible par 9. Par **10** : le nombre finit par 0.

PROPRIÉTÉ

Quand s'arrêter de chercher. Si aucun nombre premier dont le carré est inférieur ou égal à n ne divise n , alors n est premier. Pour tester 97 : on essaie 2, 3, 5, 7 — et on s'arrête, car $11^2 = 121$ dépasse 97.

$$11^2 = 121 > 97$$

2 Décomposer sans tâtonner

LA DIVISION EN ESCALIER

- ① **On épuise 2 avant de passer à 3.** Tant que le nombre est pair, on divise par 2 et on recommence.
- ② **Puis 3, en s'aidant du critère.** Somme des chiffres divisible par 3 ? On divise, et on retente le 3 sur le quotient.
- ③ **Puis 5, 7, 11, 13...** dans l'ordre. On ne saute jamais un premier : c'est ainsi qu'on oublie un facteur.
- ④ **On s'arrête à 1**, et on relit le produit obtenu : chaque facteur doit être premier.
- ⑤ **On vérifie en refaisant le produit.** Cinq secondes, et le correcteur le voit.

EXEMPLE

Décomposer 504 en produit de facteurs premiers.

- ① 504 est pair : on divise par 2, trois fois de suite.
 $504/2 = 252$
 puis $252/2 = 126$, puis $126/2 = 63$
 - ② 63 est impair, le 2 est épuisé. Somme des chiffres : $6 + 3 = 9$, divisible par 3.
 $63/3 = 21$
 - ③ Encore 3 : $21/3 = 7$.
 - ④ 7 est premier : on termine.
 $7/7 = 1$
 - ⑤ **Vérification**, attendue par le barème.
 $8 \times 9 \times 7 = 504$
 donc $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$
- $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

3 Rendre une fraction irréductible

DÉFINITION

Une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont **aucun diviseur commun autre que 1**. C'est ce que le barème demande : « simplifier » ne suffit pas, il faut arriver au bout.

EN UNE SEULE DIVISION

- 1 **Décomposer** le numérateur et le dénominateur, l'un sous l'autre.
- 2 **Prendre les facteurs communs**, chacun avec le **plus petit exposant** : leur produit est le plus grand diviseur commun.
- 3 **Diviser une seule fois** le haut et le bas par ce nombre. La fraction obtenue est irréductible, sans avoir à le vérifier.

EXEMPLE

Rendre irréductible la fraction $\frac{210}{294}$.

- 1 Les deux décompositions, écrites l'une sous l'autre.
 $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
et $294 = 2 \times 3 \times 7^2$
- 2 Facteurs communs : 2, 3 et 7 — le 7 apparaît une fois dans 210 et deux fois dans 294, on garde le plus petit exposant.
 $2 \times 3 \times 7 = 42$
- 3 Une seule division, en haut et en bas.
 $210/42 = 5$
et $294 / 42 = 7$
- 4 5 et 7 sont premiers et différents : la fraction $\frac{5}{7}$ est irréductible.

$$\frac{210}{294} = \frac{5}{7}$$

4 Les problèmes de partage

DÉFINITION

Le **plus grand commun diviseur** de deux entiers : le plus grand nombre qui les divise tous les deux. Ce n'est pas l'objet du chapitre, c'est **l'outil** — celui qui rend une fraction irréductible et celui qui répond aux problèmes de lots identiques.

DEUX CHEMINS, ET LEQUEL PRENDRE

- 1 **Par décomposition** — facteurs communs, plus petit exposant. À préférer quand la question suivante demande une fraction irréductible ou une répartition : la décomposition sert deux fois.
- 2 **Par l'algorithme d'Euclide** — on divise le grand par le petit, puis le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul. **Le dernier reste non nul est le PGCD**. À préférer sur de grands nombres, où la décomposition se cherche.
- 3 **Dans les deux cas, on écrit la méthode en entier**. Un PGCD annoncé sans calcul visible ne rapporte presque rien, même juste.

EXEMPLE

Calculer le PGCD de 96 et 60 par les deux méthodes.

- 1 Par décomposition : les facteurs communs sont 2 — au plus petit exposant, 2^2 — et 3.
 $4 \times 3 = 12$
car $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $96 = 2^5 \times 3$
- 2 Par Euclide, première division.
 $96 - 60 \times 1 = 36$
 $96 = 60 \times 1 + 36$
- 3 On recommence avec 60 et 36.
 $60 - 36 \times 1 = 24$
 $60 = 36 \times 1 + 24$
- 4 Puis avec 36 et 24.
 $36 - 24 \times 1 = 12$
 $36 = 24 \times 1 + 12$
- 5 Enfin 24 et 12 : le reste est nul, donc le dernier reste non nul est 12.
 $24 - 12 \times 2 = 0$
les deux méthodes donnent 12

$$\underline{\text{PGCD}(96; 60) = 12}$$

RECONNAÎTRE EN DIX SECONDES

- 1 **Le signal.** « Le plus grand nombre de paquets identiques », « sans qu'il en reste », « tous identiques », « la plus grande longueur possible » : ces formules demandent le **plus grand diviseur commun**, toujours.
- 2 **Le contre-signal.** « Ils se retrouvent au bout de combien de jours », « les deux en même temps », « la plus petite longueur » : ce n'est pas le même calcul. Ces questions cherchent un **multiple** commun, et se traitent en listant les multiples de chaque nombre jusqu'au premier qu'ils partagent.
- 3 **Le réflexe qui économise l'exercice.** Soulignez « plus grand » ou « plus petit » dans l'énoncé. C'est ce mot, et lui seul, qui décide.
- 4 **Le contrôle de vraisemblance.** Un diviseur commun est **plus petit** que les deux nombres. Si votre réponse les dépasse, vous avez changé de notion sans le voir.

EXEMPLE

Un professeur dispose de 60 stylos et 96 crayons. Il veut constituer le plus grand nombre possible de lots identiques, en utilisant tout. Combien de lots, et que contient chacun ?

- 1 **La phrase de modélisation**, celle qui est notée : le nombre de lots divise 60 et divise 96, et on le veut le plus grand possible — c'est leur PGCD, calculé plus haut : 12.
- 2 Il peut faire **12 lots**. Beaucoup de copies s'arrêtent ici et perdent la moitié des points.
- 3 Ce que contient un lot, c'est la seconde question : deux divisions.
 $60/12 = 5$
et $96/12 = 8$
- 4 **Réponse rédigée** : 12 lots, contenant chacun 5 stylos et 8 crayons.
- 5 **Vérification** : tout est utilisé, il ne reste rien.
 $12 \times 5 = 60$
et $12 \times 8 = 96$

12 lots de 5 stylos et 8 crayons

5 Divisibilité : c'est le reste qui décide

DÉFINITION

Diviser a par b , c'est écrire $a = b \times q + r$ avec un **reste r strictement inférieur au diviseur b** . Le quotient q et le reste r sont uniques. Si r atteint ou dépasse b , la division n'est pas finie.

PROPRIÉTÉ

b divise a si et seulement si le reste est nul. C'est la seule réponse acceptée à « peut-on partager sans qu'il en reste » : un reste, même de 1, suffit à dire non.

$$a = b \times q + r \quad (0 \leq r < b)$$

EXEMPLE

Un fleuriste a 96 roses et compose des bouquets de 7 roses. Combien de bouquets complets ? Combien de roses restantes ? Combien lui en manque-t-il pour un bouquet de plus ?

- 1 On cherche le plus grand multiple de 7 inférieur ou égal à 96.
 $7 \times 13 = 91$
- 2 Le reste est ce qui sépare 91 de 96, et il est bien inférieur à 7.
 $96 - 91 = 5$
donc $96 = 7 \times 13 + 5$
- 3 **13 bouquets complets et 5 roses restantes.** Le reste n'est pas nul : 7 ne divise pas 96.
- 4 Pour un bouquet de plus, il faut atteindre le multiple suivant.
 $7 \times 14 = 98$
il manque $98 - 96 = 2$ roses

$$\underline{96 = 7 \times 13 + 5}$$

6 Les pièges qui coûtent des points

PIÈGE

Écrire $504 = 1 \times 2^3 \times 3^2 \times 7$. — la division en escalier finit sur 1, et on croit que ce 1 fait partie du produit.

Ce que ça coûte : La question de cours sur les nombres premiers, et la crédibilité du reste.

Le réflexe : Un nombre premier a **exactement deux** diviseurs ; 1 n'en a qu'un. Il n'entre jamais dans une décomposition.

PIÈGE

Chercher un multiple commun là où l'énoncé dit « le plus grand nombre de lots ». — les deux questions se ressemblent et se calculent depuis les mêmes décompositions.

Ce que ça coûte : Toute la question, avec un résultat absurde — 480 lots pour 60 stylos.

Le réflexe : Un **diviseur** commun est plus petit que les nombres, un **multiple** commun est plus grand. Si la réponse dépasse les données, c'est l'autre notion.

PIÈGE

Répondre « 12 lots » et s'arrêter. — le calcul difficile est fait, l'effort semble terminé.

Ce que ça coûte : La moitié des points de la question, systématiquement.

Le réflexe : Relire l'énoncé **après** avoir répondu. « Combien de lots et que contient chaque lot » compte deux réponses.

PIÈGE

S'arrêter à $120 = 2^3 \times 15$. — 15 « a l'air » d'un facteur simple, et le produit est juste.

Ce que ça coûte : La décomposition entière : elle n'est pas en facteurs premiers, donc elle est fausse.

Le réflexe : Relire le produit final facteur par facteur. 15 n'est pas premier : $15 = 3 \times 5$.

PIÈGE

Rendre $\frac{210}{294} = \frac{30}{42}$ comme fraction irréductible. — la fraction a bien été simplifiée — une fois, par 7.

Ce que ça coûte : Le point d'irréductibilité, qui est celui de la question.

Le réflexe : Diviser par le **plus grand** diviseur commun, d'un seul coup. La question ne se pose plus.

7 Avant de rendre

À VÉRIFIER

- Tous les facteurs de ma décomposition sont-ils **premiers** ?
- Ai-je **exclu 1** du produit ?
- Ai-je **refait le produit** pour vérifier ?
- L'énoncé dit-il « **plus grand** » (diviseur) ou « **en même temps** » (multiple) ?
- Ai-je écrit la **phrase de modélisation** avant le calcul ?
- Ai-je répondu à **toutes** les questions, pas seulement à la première ?
- Ma fraction est-elle divisée par le **plus grand** diviseur commun, en une fois ?
- Mes réponses portent-elles leur **unité** — des lots, des stylos, des centimètres ?

À RETENIR

- Un nombre **premier** a exactement **deux** diviseurs : 1 n'est pas premier, 2 est le seul pair.
- Décomposer : épuiser 2, puis 3, puis 5, 7, 11... jusqu'à 1 — et **chaque facteur final est premier**.
- Fraction irréductible : diviser **une seule fois** par le plus grand diviseur commun.
- « Plus grand nombre de lots », « sans reste » → **plus grand diviseur commun**.
- Euclide : on divise, on remplace, **le dernier reste non nul est le PGCD**.
- Un diviseur commun est **plus petit** que les nombres. Si la réponse les dépasse, c'est l'autre notion.