

Fonctions linéaires et affines

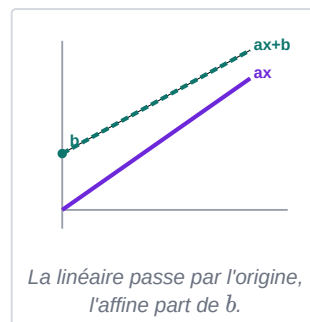
Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Une fonction est une **machine à un seul bouton** : on entre un nombre, il en sort un autre, toujours le même pour la même entrée. Les fonctions linéaires et affines sont les plus simples de toutes — ce sont celles dont le graphique est une droite — et elles décrivent l'essentiel de la vie courante : un prix au kilo, un abonnement, une remise, une vitesse constante.

1 Deux familles, une différence

DÉFINITION

Une fonction **linéaire** s'écrit $f(x) = ax$: elle traduit une **proportionnalité**. Une fonction **affine** s'écrit $f(x) = ax + b$: elle ajoute une constante de départ. Toute fonction linéaire est affine, avec $b = 0$; l'inverse est faux.



Tout se joue sur b : **une fonction linéaire passe par l'origine**, une affine part d'ailleurs. C'est visible d'un coup d'œil sur un graphique, et cela suffit à répondre à « y a-t-il proportionnalité ? ».

2 Calculer une image, un antécédent

DANS LES DEUX SENS

- ① **Image** — on connaît x , on cherche $f(x)$: on remplace, on calcule. Avec $f(x) = 2x + 5$:
 $f(3) = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$
- ② **Antécédent** — on connaît $f(x)$, on cherche x : on résout une équation. Pour $f(x) = 17$, on écrit $2x + 5 = 17$.
- ③ On isole l'inconnue : $2x = 12$, donc $x = 6$.
- ④ On vérifie en calculant l'image de 6.
 $2 \times 6 + 5 = 12 + 5 = 17$
l'antécédent de 17 est bien 6

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

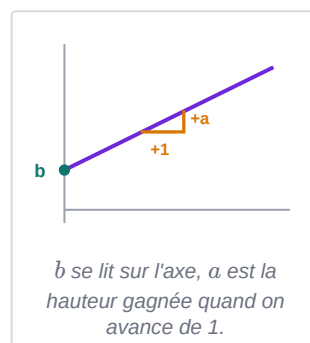
Confondre image et antécédent. — les deux questions vont en sens opposés : l'image se **calcule**, l'antécédent se **résout**. Prendre l'un pour l'autre transforme un calcul direct en équation, ou l'inverse.

Le réflexe : repérer de quel côté est l'inconnue. Si elle est dans la parenthèse, c'est un antécédent et il faudra résoudre.

3 Lire la droite

RÈGLE

Pour $f(x) = ax + b$: a est le **coefficient directeur** — la hauteur gagnée quand on avance de 1 — et b l'**ordonnée à l'origine**, la valeur en $x = 0$. Si $a > 0$ la fonction croît, si $a < 0$ elle décroît, si $a = 0$ elle est constante.



EXEMPLE

Une droite passe par les points $(0 ; 5)$ et $(3 ; 11)$. On retrouve son expression sans dessin.

- ① L'ordonnée à l'origine se lit directement : $b = 5$, puisque le premier point a pour abscisse 0.
- ② Le coefficient directeur est le rapport de la hauteur gagnée sur la distance parcourue.
 $a = \frac{11-5}{3-0} = \frac{6}{3} = 2$
- ③ On vérifie sur le second point.
 $2 \times 3 + 5 = 11$

$f(x) = 2x + 5$

4 Pourcentages : le cas le plus utile

RÈGLE

Une évolution en pourcentage est une fonction **linéaire**. Augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; diminuer de $t\%$ revient à multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

EXEMPLE

Deux coefficients à savoir retrouver instantanément.

- ① Une hausse de 15 %
 $1 + 0,15 = 1,15$
- ② Une baisse de 20 %
 $1 - 0,2 = 0,8$
- ③ Une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au départ.
 $1,15 \times 0,8 = 0,92$
il reste une baisse de 8 %

les pourcentages se multiplient, ils ne s'additionnent pas

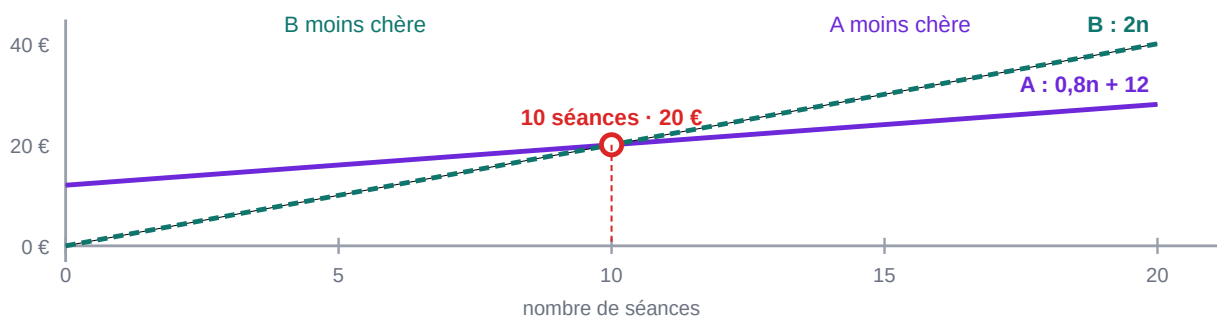
C'est la raison pour laquelle « +10 % puis -10 % » ne rend pas le prix initial : $1,1 \times 0,9 = 0,99$. Il manque 1 %.

EXEMPLE

Deux formules pour la même salle : A coûte 12 € par mois plus 0,80 € la séance, B coûte 2 € la séance sans abonnement. La comparaison se lit d'un coup sur le graphique.

- ① On cherche le nombre de séances où les deux formules coûtent la même chose : $0,8n + 12 = 2n$, soit $12 = 1,2n$ et $n = 10$.
- ② Formule A pour 10 séances
 $0,8 \times 10 + 12 = 8 + 12 = 20$
- ③ Formule B pour 10 séances
 $2 \times 10 = 20$

avant 10 séances B est moins chère, après c'est A



À RETENIR

- **Linéaire** $f(x) = ax$: droite passant par l'origine, il y a proportionnalité.
- **Affine** $f(x) = ax + b$: la droite part de b .
- L'**image** se calcule, l'**antécédent** se résout.
- a est la hauteur gagnée quand on avance de 1 ; b est la valeur en $x = 0$.
- Augmenter de $t\%$: multiplier par $1 + t/100$. Diminuer : par $1 - t/100$.
- Les pourcentages successifs se **multiplient** : +10 % puis -10 % ne ramène pas au départ.