COURS

3e

Grandeurs composées — Vitesses, débits et conversions

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Une vitesse en km/h, un débit en L/min, une consommation d'électricité en kWh : ces grandeurs sont fabriquées à partir de deux autres, par une division ou par une multiplication. **Une grandeur composée se calcule avec ses unités : on fait sur les unités la même opération que sur les nombres.** C'est ce qui permet de convertir sans rien apprendre par cœur, et de repérer une formule fausse.

1 Grandeurs quotients, grandeurs produits

DÉFINITION

Une **grandeur quotient** est le quotient de deux grandeurs. Son unité est le **quotient des deux unités**. Une distance en km divisée par une durée en h donne une **vitesse** en km/h ; un volume en m³ divisé par une durée en s donne un **débit** en m³/s ; une masse en kg divisée par un volume en m³ donne une **masse volumique** en kg/m³ ; une masse dissoute en g divisée par un volume de solution en L donne une **concentration** en g/L.

DÉFINITION

Une **grandeur produit** est le produit de deux grandeurs. Son unité est le **produit des deux unités**. Une puissance en kW multipliée par une durée en h donne une **énergie** en kWh (le kilowattheure). Le **trafic** d'une ligne de transport se mesure en voyageurs·km : 200 voyageurs transportés sur 15 km font $200 \times 15 = 3\,000$ voyageurs·km. L'aire, en m² = m × m, est déjà une grandeur produit.

grandeur	elle se calcule par	unités usuelles
vitesse	distance ÷ durée	km/h ; m/s
débit	volume ÷ durée	m³/s ; L/min ; L/h
masse volumique	masse ÷ volume	kg/m³ ; g/cm³ ; kg/L
concentration	masse dissoute ÷ volume de solution	g/L
énergie	puissance × durée	kWh ; Wh
trafic	nombre de voyageurs × distance	voyageurs·km

÷ grandeur quotient × grandeur produit « / » se lit « par » : km/h, kilomètres par heure

Six grandeurs composées. La phrase « elle se calcule par » donne à la fois la formule et l'unité.

TROUVER L'UNITÉ D'UNE GRANDEUR COMPOSÉE

1. **Écrire la grandeur** comme un quotient ou un produit de deux grandeurs : une concentration, c'est une masse **divisée** par un volume.
2. **Faire la même opération sur les unités** : grammes divisés par litres donnent des g/L, des kW multipliés par des h donnent des kWh.
3. **Lire l'unité à voix haute** : la barre se lit « par ». Des g/L sont des grammes **par** litre : le nombre de grammes dans un litre.

EXEMPLE

On dissout 30 g de sel dans de l'eau et on obtient 1,5 L d'eau salée. Quelle est la concentration en sel de cette eau ?

1. Une masse divisée par un volume : des g divisés par des L, donc des g/L.

$$\frac{30}{1{,}5} = 20$$

la concentration est de 20 g/L

PIÈGE

Calculer $1{,}5 \div 30 = 0{,}05$ et annoncer une concentration de 0,05 g/L. — la division est faite à l'envers. $1{,}5 \div 30$ donne des **litres par gramme** : 0,05 L d'eau salée pour chaque gramme de sel. Ce n'est pas la grandeur demandée.

Ce que ça coûte : la question entière : un résultat 400 fois trop petit.

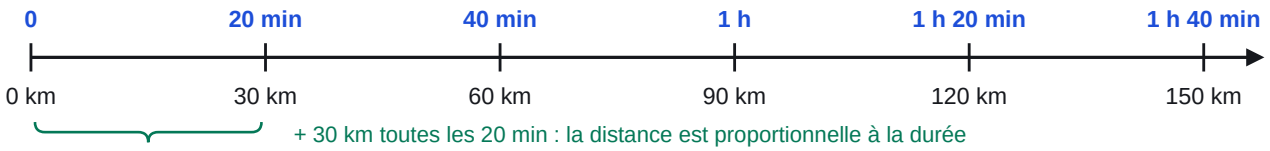
Le réflexe : l'unité dicte l'ordre : des g/L, ce sont des **grammes** au numérateur et des **litres** au dénominateur.

2 Distance, durée, vitesse

DÉFINITION

Un mobile qui parcourt une distance d pendant une durée t a une **vitesse moyenne** $v = \frac{d}{t}$. Si sa vitesse est **constante**, la distance parcourue est **proportionnelle** à la durée (rappel de 4e) : la vitesse est alors le coefficient de proportionnalité. Trois écritures de la même relation : $v = \frac{d}{t}$, $d = v \times t$ et $t = \frac{d}{v}$.

À la vitesse constante de 90 km/h — durées en bleu, distances parcourues en noir



+ 30 km toutes les 20 min : la distance est proportionnelle à la durée

Des durées égales, des distances égales.

RÈGLE

Une durée se convertit en base 60, pas en base 10 (rappel de 5e) : 1 h = 60 min, 1 min = 60 s, donc 1 h = 3 600 s. En heures décimales, on **divise les minutes par 60** : 1 h 18 min = $1 + \frac{18}{60}$ h = 1,3 h. Inversement, on **multiplie la partie décimale par 60** : 0,7 h = $0{,}7 \times 60$ min = 42 min.

CALCULER UNE VITESSE, UNE DISTANCE OU UNE DURÉE

1. **Repérer l'inconnue** et écrire la relation qui la donne : $v = \frac{d}{t}$, $d = v \times t$ ou $t = \frac{d}{v}$.
2. **Accorder les unités** : avec une vitesse en km/h, la distance en km et la durée en h ; avec une vitesse en m/s, des m et des s. Une durée en h et min se convertit d'abord.
3. **Calculer**, puis **conclure** avec l'unité, et se demander si l'ordre de grandeur est plausible.

EXEMPLE

Un car parcourt 150 km en 1 h 40 min. Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?

1. 1 h 40 min ne s'écrit pas simplement en heures décimales (40 min = $\frac{2}{3}$ h) : on passe par les minutes, 1 h 40 min = 100 min.
2. Distance par minute :
$$\frac{150}{100} = 1{,}5$$
1,5 km par minute
3. Une heure compte 60 minutes :
$$1{,}5 \times 60 = 90$$

la vitesse moyenne du car est de 90 km/h

PIÈGE

Écrire 1 h 40 min = 1,40 h, puis $150 \div 1{,}4 \approx 107$ km/h. — une heure compte 60 minutes, pas 100. 40 min, ce sont les deux tiers d'une heure, environ 0,67 h.

Ce que ça coûte : le résultat, et ceux des questions qui réutilisent la vitesse.

Le réflexe : toujours diviser les minutes par 60 : 30 min = 0,5 h, 15 min = 0,25 h, 6 min = 0,1 h.

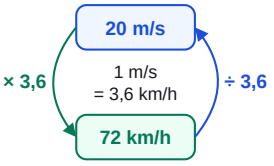
3 Convertir une grandeur composée

CONVERTIR DES KM/H EN M/S

1. **Traduire l'unité en phrase** : 72 km/h signifie « 72 km parcourus en 1 h ». Pour convertir une grandeur quotient, on convertit **séparément** le numérateur et le dénominateur.
2. **Convertir chaque grandeur** : 72 km = 72 000 m et 1 h = 3 600 s.
3. **Diviser** pour revenir à une seule seconde.
$$\frac{72\,000}{3\,600} = 20$$

PROPRIÉTÉ

1 m/s = 3,6 km/h (démontré) : en 1 h = 3 600 s, on parcourt 3 600 m, soit 3,6 km. Donc, pour passer des m/s aux km/h, on **multiplie par 3,6** ; des km/h aux m/s, on **divise par 3,6**.

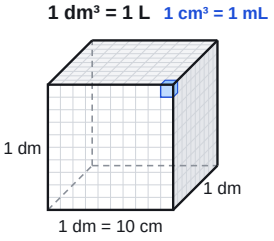


Le 3,6 se retrouve en une ligne.

RÈGLE

Volume et contenance : 1 L = 1 dm³, 1 mL = 1 cm³, 1 000 L = 1 m³ (rappel de 5e). Entre deux unités de volume voisines, le rapport est **1 000** : une arête de 1 m mesure 10 dm, donc un cube de 1 m³ contient $10 \times 10 \times 10$ cubes de 1 dm³. Les puissances de 10 l'écrivent en une ligne (démontré) :

$$1\ \text{m}^3 = (10\ \text{dm})^3 = 10^3\ \text{dm}^3 \qquad 1\ \text{cm}^3 = (10^{-2}\ \text{m})^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3$$



1 000 petits cubes de 1 cm³.

EXEMPLE

Le débit d'un torrent est de 0,2 m³/s. Exprimer ce débit en L/min.

1. Le numérateur d'abord : 0,2 m³ en litres, avec 1 m³ = 1 000 L.
$0{,}2 \times 1\,000 = 200$
2. Le dénominateur ensuite : une minute dure 60 s, donc il passe 60 fois plus d'eau en une minute qu'en une seconde.
$200 \times 60 = 12\,000$

0,2 m³/s = 12 000 L/min

PIÈGE

Convertir 72 km/h en m/s en divisant seulement par 1 000 : « 72 km/h = 0,072 m/s ». — seul le numérateur a été traité, et mal : 72 km valent 72 000 m, pas 0,072 m. Et l'heure n'a pas été convertie en secondes : 7 cm par seconde pour une voiture, c'est absurde.

Ce que ça coûte : la conversion, et tous les calculs qui s'appuient sur elle.

Le réflexe : écrire la phrase « 72 km en 1 h », convertir **les deux** grandeurs ; en m/s, le nombre est 3,6 fois plus petit.

PIÈGE

Écrire 1 m³ = 10 dm³ ou 1 m³ = 100 L. — c'est la règle des longueurs (10) ou des aires (100). Un volume est le produit de trois longueurs : chacune est multipliée par 10, donc le volume par $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$.

Ce que ça coûte : un résultat faux d'un facteur 100 ou 1 000.

Le réflexe : se souvenir du cube : 1 m³ = 1 000 dm³ = 1 000 L.

4 Débit, énergie, masse volumique : la même mécanique

DÉFINITION

Le **débit** d'un robinet, d'une pompe ou d'une rivière est le volume qui s'écoule par unité de temps : $Q = \frac{V}{t}$, en m³/s, L/min ou L/h. Comme pour la vitesse, on en tire $V = Q \times t$ et $t = \frac{V}{Q}$.

DÉFINITION

Un appareil de **puissance** P qui fonctionne pendant une durée t consomme l'**énergie** $E = P \times t$. Avec P en kilowatts (1 kW = 1 000 W) et t en heures, E est en **kilowattheures** (kWh) : c'est l'unité des factures d'électricité.

EXEMPLE

Un four de 2 400 W fonctionne pendant 45 min. Quelle énergie consomme-t-il, en kWh ?

1. On accorde les unités : 2 400 W = 2,4 kW, et 45 min = $\frac{45}{60}$ h = 0,75 h.
2. On multiplie la puissance par la durée.
$2{,}4 \times 0{,}75 = 1{,}8$

le four consomme 1,8 kWh

DÉFINITION

La **masse volumique** d'une matière est la masse d'un volume unité de cette matière : $\rho = \frac{m}{V}$ (la lettre grecque ρ se lit « rhô »), en kg/m³, g/cm³ ou kg/L. Celle de l'eau vaut environ 1 kg/L, soit 1 000 kg/m³ : un litre d'eau a une masse d'environ 1 kg.

EXEMPLE

Une barre d'aluminium a un volume de 250 cm³ et une masse de 675 g. Calculer sa masse volumique en g/cm³, puis en kg/m³.

1. Masse divisée par volume :
$\frac{675}{250} = 2{,}7$
2. Un mètre cube contient 10^6 = 1 000 000 cm³, chacun de 2,7 g :
$2{,}7 \times 1\,000\,000 = 2\,700\,000$

2,7 g/cm³, soit 2 700 kg/m³

PIÈGE

Multiplier une puissance en watts par une durée en minutes et appeler le résultat des kWh : $2\,400 \times 45 = 108\,000$ **« kWh ».** — des W × min ne sont pas des kWh : le résultat est 60 000 fois trop grand.

Ce que ça coûte : le résultat, et le prix qui en découle.

Le réflexe : convertir **avant** de multiplier : la puissance en kW, la durée en h.

5 Vérifier la cohérence des unités

RÈGLE

Les unités se calculent comme des nombres : elles se multiplient, se divisent et se simplifient. Si l'unité obtenue n'est pas celle de la grandeur cherchée, la formule est fausse.

$$\frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \times \cancel{\text{h}} = \text{km} \qquad \frac{\text{m}^3}{\frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = \text{s} \qquad \text{kW} \times \text{h} = \text{kWh}$$

CONTRÔLER UN RÉSULTAT AVANT DE LE RENDRE

1. **Écrire les unités dans le calcul** et les simplifier : des m/s multipliés par des s donnent des m.
2. **Vérifier que les unités sont accordées** : jamais de km/h multipliés par des minutes, jamais de m/s multipliés par des heures.
3. **Comparer à une référence connue** : un piéton marche à environ 5 km/h, le son parcourt environ 340 m/s dans l'air, la lumière environ 300 000 km/s, et le tour de la Terre mesure environ 40 000 km.

EXEMPLE

Une cycliste roule à 18 km/h. Elle voit un obstacle et met 2 s à réagir avant de freiner. Quelle distance parcourt-elle pendant ces 2 s ?

1. La durée est en secondes : on convertit la vitesse en m/s pour accorder les unités.
   $18 \div 3{,}6 = 5$
2. $d = v \times t$, et m/s × s donne bien des m. Contrôle : 10 m, quelques longueurs de vélo, c'est plausible.
   $5 \times 2 = 10$

elle parcourt 10 m avant de commencer à freiner

PIÈGE

Écrire « 90 km/h pendant 20 min : $90 \times 20 = 1\,800$ **km ».** — des km/h multipliés par des minutes ne donnent pas des km. 1 800 km en vingt minutes, ce serait 5 400 km/h. Avec 20 min = $\frac{1}{3}$ h, on trouve 30 km.

Ce que ça coûte : le résultat, 60 fois trop grand.

Le réflexe : écrire l'unité de chaque facteur, et convertir la durée en heures **avant** de multiplier.

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit la grandeur cherchée comme un **quotient** ou un **produit**, et en ai-je déduit son unité ?
- Les unités sont-elles **accordées** avant le calcul : km avec h, m avec s, kW avec h ? Les minutes divisées par **60** ?
- Le sens du 3,6 est-il le bon : le nombre en km/h est-il **plus grand** que le nombre en m/s ?
- Mon résultat est-il **plausible**, et ma conclusion donne-t-elle la grandeur demandée **avec son unité** ?

À RETENIR

- Une **grandeur quotient** divise deux grandeurs, une **grandeur produit** les multiplie : l'unité suit la même opération.
- $d = v \times t$, avec la durée dans l'unité de la vitesse.
- Minutes en heures : **diviser par 60**. 1 h 30 min = 1,5 h.
- Une grandeur quotient se convertit **en haut et en bas séparément** : 1 m/s = 3,6 km/h.
- **1 L = 1 dm³**, 1 mL = 1 cm³, 1 m³ = 1 000 L.
- Un résultat qui n'a pas l'unité attendue vient d'**une formule fausse**.