COURS

3e

Pourcentages et évolutions — Coefficient multiplicateur

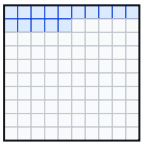
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Soldes, hausse d'un loyer, baisse d'une population : une évolution se dit le plus souvent en pourcentage. Tout le chapitre tient dans une règle : **augmenter de t %, c'est multiplier par $1+\frac{t}{100}$; diminuer de t %, c'est multiplier par $1-\frac{t}{100}$.** Ce nombre, le coefficient multiplicateur, ramène tout calcul d'évolution à une seule multiplication, ou à une seule division pour remonter à la valeur de départ.

1 Rappels : pourcentage et quatrième proportionnelle

DÉFINITION

Un **pourcentage** est une proportion écrite sur 100 : « 30 % des élèves » signifie « 30 élèves sur 100 », quel que soit l'effectif. **Prendre t % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.** Inversement, une part p d'un total T en représente $\frac{p}{T}\times 100$ %.



15 cases sur 100 = 15 %

1 case : 2,40 €
15 cases : 36 €

15 % de 240 € : 15 cases sur 100, à 2,40 € chacune, soit 36 €.

PRENDRE UN POURCENTAGE, EXPRIMER UNE PROPORTION

1. **Prendre t % de a** : écrire $\frac{t}{100}$ en nombre décimal, puis multiplier. Pour 35 % de 80 € :
   $0{,}35\times 80=28$
   35 % de 80 € valent 28 €
2. **Exprimer une part en pourcentage** : diviser la part par le total, puis multiplier par 100. Pour 18 élèves sur 24 :
   $\frac{18}{24}=0{,}75$
   0,75 = 75 %

PIÈGE

Écrire 5 % $=0{,}5$. — 5 % $=\frac{5}{100}=0{,}05$. Le nombre $0{,}5$ vaut $\frac{50}{100}$, soit 50 % : dix fois trop.

Ce que ça coûte : un résultat dix fois trop grand, ou dix fois trop petit.

Le réflexe : diviser par 100, c'est décaler la virgule de **deux** rangs : 5 % $=0{,}05$, 35 % $=0{,}35$, 150 % $=1{,}5$.

RÈGLE

Quatrième proportionnelle (rappel de 4e). Si deux grandeurs sont proportionnelles et que la valeur a correspond à b, alors la valeur c correspond à $x=\frac{b\times c}{a}$ $(a\neq 0)$: c'est l'égalité des produits en croix, $a\times x=b\times c$. Le passage par l'unité ou par le coefficient de proportionnalité convient aussi.

EXEMPLE

Dans un collège, 126 élèves sont demi-pensionnaires, soit 35 % de l'effectif. Combien d'élèves compte le collège ?

1. Le nombre d'élèves est proportionnel au pourcentage : 35 % correspondent à 126 élèves, 100 % à l'effectif x cherché.
   Produits en croix : $35\times x=126\times 100$, donc
   $x=\frac{126\times 100}{35}=360$
   vérification : 0,35 × 360 = 126

le collège compte 360 élèves

PIÈGE

Diviser le total par la part : pour 18 élèves sur 24, calculer $24\div 18\approx 1{,}33$ et annoncer « 133 % ». — une proportion se calcule **part sur total**. 18 élèves sont une partie des 24 : ils ne peuvent pas en représenter plus de 100 %.

Ce que ça coûte : le résultat, et toute question qui l'utilise ensuite.

Le réflexe : dire la phrase « 18 **sur** 24 » : ce qui suit « sur » va au dénominateur.

PIÈGE

Additionner des pourcentages qui portent sur des totaux différents : « 35 % des filles et 25 % des garçons font du théâtre, donc 60 % des élèves en font ». — ce ne sont pas des parts du même tout. Sur l'ensemble des élèves, la proportion est comprise entre 25 % et 35 %.

Ce que ça coûte : une conclusion fausse, souvent absurde.

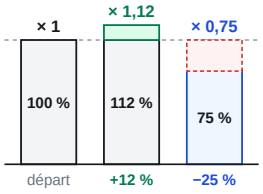
Le réflexe : se demander « pourcentage de quoi ? », et revenir aux effectifs.

2 Augmenter ou diminuer : le coefficient multiplicateur

PROPRIÉTÉ

On note V_D la **valeur de départ** et V_A la **valeur d'arrivée**. Augmenter V_D de t %, c'est lui ajouter $\frac{t}{100} \times V_D$; en factorisant par V_D, $V_A = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times V_D$. De même, diminuer de t % donne $V_A = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times V_D$. **Propriété démontrée** : une évolution se calcule par une seule multiplication, $V_A = CM \times V_D$. Le nombre CM s'appelle le **coefficient multiplicateur** de l'évolution.

$$\text{hausse : } CM = 1 + \frac{t}{100} \qquad \text{baisse : } CM = 1 - \frac{t}{100}$$



Ce qui reste, en pourcentage du départ, donne le coefficient.

TRADUIRE UNE ÉVOLUTION PAR SON COEFFICIENT

1. Lire l'énoncé : **hausse** (augmentation, majoration, croissance) ou **baisse** (diminution, remise, réduction, perte) ?
2. Écrire le taux en nombre décimal : $t\,\% = \frac{t}{100}$. Par exemple, $12\,\% = 0{,}12$.
3. L'**ajouter à 1** pour une hausse, le **retrancher de 1** pour une baisse. Hausse de 150 % :
   $1 + 1{,}5 = 2{,}5$
   la valeur fait plus que doubler
4. Contrôler : une hausse donne $CM > 1$, une baisse $CM < 1$. Puis calculer $V_A = CM \times V_D$.

PIÈGE

Traduire une baisse de 30 % par « $\times\, 0{,}3$ ». — multiplier par $0{,}3$ ne garde que 30 % de la valeur : c'est une baisse de **70 %**. Après une baisse de 30 %, il reste $100 - 30 = 70$ %, d'où $CM = 0{,}7$.

Ce que ça coûte : le résultat, souvent très loin du bon.

Le réflexe : se demander « combien en reste-t-il ? » : ce qui reste, en pourcentage, donne le coefficient.

EXEMPLE

Un abonnement de 340 € augmente de 6 %. Une commune de 12 500 habitants perd 4 % de sa population. Calculer les nouvelles valeurs.

1. Hausse de 6 % : $CM = 1{,}06$.
   $340 \times 1{,}06 = 360{,}4$
2. Baisse de 4 % : $CM = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.
   $12\,500 \times 0{,}96 = 12\,000$

l'abonnement coûte 360,40 € ; la commune compte 12 000 habitants

Le taux étant fixé, la valeur d'arrivée est **proportionnelle** à la valeur de départ, de coefficient CM : appliquer une évolution, c'est appliquer la **fonction linéaire** $x \mapsto CM \times x$. Voir la fiche « Fonctions linéaires et affines ».

PIÈGE

Pour une hausse de 6 %, multiplier par $0{,}06$: « $340 \times 0{,}06 = 20{,}40$, le nouveau prix est 20,40 € ». — $340 \times 0{,}06$ est le **montant de la hausse**, pas le nouveau prix. Le coefficient d'une hausse de 6 % est $1{,}06$: on garde les 100 % et on ajoute les 6 %.

Ce que ça coûte : le résultat, et toute la suite du problème.

Le réflexe : après une hausse, un nouveau prix plus petit que l'ancien est forcément faux.

PIÈGE

Lire le coefficient comme un pourcentage : voir $1{,}3$ et annoncer « une hausse de 3 % », ou voir $0{,}85$ et annoncer « une baisse de 85 % ». — le taux est l'**écart à 1** : $1{,}3 - 1 = 0{,}3$, soit une hausse de 30 % ; $0{,}85 - 1 = -0{,}15$, soit une baisse de 15 %.

Ce que ça coûte : la conclusion, alors que le calcul était juste.

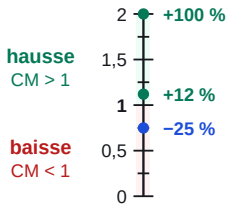
Le réflexe : toujours repasser par 1 : ce qui dépasse 1 est la hausse, ce qui manque à 1 est la baisse.

3 Calculer un taux d'évolution

PROPRIÉTÉ

Si une grandeur passe de V_D à V_A (avec $V_D \neq 0$), son coefficient multiplicateur est $CM = \dfrac{V_A}{V_D}$ et son **taux d'évolution** est $\dfrac{V_A - V_D}{V_D}$, que l'on écrit en pourcentage. **Démonstration** : $\dfrac{V_A - V_D}{V_D} = \dfrac{V_A}{V_D} - \dfrac{V_D}{V_D} = CM - 1$. Un taux positif est une hausse, un taux négatif une baisse.

$$\text{taux} = \frac{V_A - V_D}{V_D} = CM - 1$$



Le taux est l'écart du coefficient à 1.

DU COEFFICIENT AU POURCENTAGE D'ÉVOLUTION

1. Repérer la **valeur de départ**, celle d'« avant », puis calculer $CM = V_A \div V_D$.
2. Calculer $CM - 1$, puis multiplier par 100 pour obtenir un pourcentage.
3. Conclure par une phrase : **hausse** si le taux est positif, **baisse** s'il est négatif, en donnant le pourcentage sans son signe.

EXEMPLE

Un loyer passe de 650 € à 676 €. Le prix d'un forfait passe de 80 € à 62 €. Calculer les taux d'évolution.

1. Loyer : $CM = \dfrac{676}{650}$, puis taux $= CM - 1$.
   $\frac{676}{650} - 1 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$
   0,04 = 4 % : une hausse de 4 %
2. Forfait : $CM = \dfrac{62}{80}$, puis taux $= CM - 1$.
   $\frac{62}{80} - 1 = 0{,}775 - 1 = -0{,}225$
   −0,225 = −22,5 % : une baisse de 22,5 %

le loyer a augmenté de 4 % ; le forfait a baissé de 22,5 %

PIÈGE

Rapporter l'écart à la valeur d'arrivée : « le loyer a augmenté de $26 \div 676 \approx 3{,}8$ % ». — un taux d'évolution se calcule **par rapport à la valeur de départ** : 26 € de plus sur un loyer de 650 €, c'est $26 \div 650 = 0{,}04$, soit 4 %.

Ce que ça coûte : le taux est faux, même si la méthode semble juste.

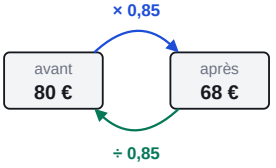
Le réflexe : se demander « de combien, par rapport à quoi ? » : la réponse est toujours « par rapport à avant ».

4 Retrouver une valeur de départ

RÈGLE

Puisque $V_A = CM \times V_D$ et que $CM \neq 0$, la valeur de départ s'obtient **en divisant** la valeur d'arrivée par le coefficient multiplicateur.

$$V_D = \frac{V_A}{CM}$$



On remonte en divisant par le coefficient.

REMONTER À LA VALEUR DE DÉPART

1. Repérer que l'énoncé donne la valeur **après** l'évolution, et calculer le coefficient multiplicateur de l'évolution subie.
2. Diviser la valeur d'arrivée par ce coefficient : $V_D = V_A \div CM$.
3. Vérifier en appliquant l'évolution à la valeur trouvée : on doit retrouver V_A.

EXEMPLE

Après une remise de 15 %, un sac coûte 68 €. Quel était son prix avant la remise ?

1. Remise de 15 % : $CM = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. Le prix de départ vérifie $0{,}85 \times V_D = 68$, donc $V_D = \frac{68}{0{,}85} = 80$
   vérification : 80 × 0,85 = 68

le sac coûtait 80 € avant la remise

PIÈGE

Remonter en appliquant l'évolution contraire : « après une remise de 15 %, j'ajoute 15 % : $68 \times 1{,}15 = 78{,}20$ € ». — la remise a été calculée sur le prix de départ, 80 €, et non sur 68 € : $78{,}20 \times 0{,}85 = 66{,}47$, et non 68.

Ce que ça coûte : le résultat, et la vérification le montre en une ligne.

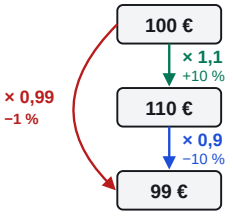
Le réflexe : remonter, c'est **diviser** par le coefficient, puis vérifier dans le sens de l'énoncé.

5 Évolutions successives

PROPRIÉTÉ

Si une valeur subit une évolution de coefficient CM_1, puis une évolution de coefficient CM_2, alors $V_A = CM_2 \times (CM_1 \times V_D) = (CM_1 \times CM_2) \times V_D$. **Propriété démontrée** : le coefficient de l'évolution globale est le **produit** des coefficients. Les pourcentages, eux, ne s'additionnent pas : la seconde évolution porte sur une valeur qui a déjà changé.

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$$



La baisse de 10 % porte sur 110 € : elle retire 11 €.

ENCHAÎNER DEUX ÉVOLUTIONS

1. Traduire **chaque** évolution par son coefficient multiplicateur.
2. **Multiplier** les coefficients : on obtient le coefficient global.
3. Le traduire en pourcentage : $CM_{\text{global}} - 1$, puis multiplier par 100. Conclure « hausse » ou « baisse ».

EXEMPLE

Un prix augmente de 10 %, puis baisse de 10 %. Revient-il à sa valeur de départ ?

1. Coefficients : $1{,}1$ pour la hausse, $0{,}9$ pour la baisse. Coefficient global, puis taux : $1{,}1 \times 0{,}9 - 1 = 0{,}99 - 1 = -0{,}01$
   −0,01 = −1 % : une baisse de 1 %

non : au total, le prix a baissé de 1 %

PIÈGE

Additionner les pourcentages : « +20 % puis −20 %, cela fait 0 % ». — le coefficient global est $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$: une baisse de 4 %. Les 20 % de la baisse sont pris sur une valeur plus grande que celle de départ.

Ce que ça coûte : la conclusion du problème.

Le réflexe : dès qu'il y a deux évolutions, écrire deux coefficients et les **multiplier**.

À VÉRIFIER

- La **valeur de départ** est-elle bien celle d'« avant » ?
- Mon coefficient est-il du bon côté de 1 : plus grand pour une hausse, plus petit pour une baisse ?
- Hausse de 6 % : ai-je multiplié par $1{,}06$, et non par $0{,}06$?
- Valeur de départ cherchée : ai-je **divisé** par le coefficient, puis vérifié ?
- Deux évolutions : ai-je **multiplié** les coefficients ?
- Ma conclusion dit-elle « hausse » ou « baisse », avec l'unité ?

À RETENIR

- **Hausse de t %** : multiplier par $1 + \frac{t}{100}$. **Baisse de t %** : multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.
- $CM > 1$: hausse ; $CM < 1$: baisse. Le taux est l'**écart à 1** : $1{,}3$ veut dire $+30$ %, $0{,}85$ veut dire -15 %.
- Taux d'évolution : $\frac{V_A - V_D}{V_D}$, toujours rapporté à la **valeur de départ**.
- Remonter à la valeur de départ : **diviser** par le coefficient, $V_D = V_A \div CM$.
- Évolutions successives : les coefficients se **multiplient** ; les pourcentages ne s'additionnent pas.