

COURS

Puissances entières relatives et notation scientifique

3^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

La distance Terre–Soleil vaut 150 000 000 000 mètres, la taille d'un atome 0,0000000001 mètre. Écrire ces nombres en toutes lettres est impraticable, et les comparer à l'œil est impossible. Les puissances de 10 règlent les deux problèmes d'un coup : elles raccourcissent l'écriture **et** rendent l'ordre de grandeur immédiatement lisible.

1 Ce que veut dire un exposant

DÉFINITION

Pour n entier positif, a^n est le produit de n facteurs égaux à a . L'exposant **compte les facteurs**, il ne multiplie pas : 2^5 vaut 32, et non 10.

RÈGLE

Deux conventions complètent la définition, et elles ne sont pas arbitraires — elles sont les seules qui prolongent les règles de calcul :

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EXEMPLE

Un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif : il l'inverse.

① Trois zéros après la virgule
 $10^{-3} = 0,001$

② L'exposant zéro
 $10^0 = 1$

③ Et un exemple qui n'est pas une puissance de 10
 $2^{-2} = 0,25$

un exposant négatif inverse, il ne change pas le signe

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $10^{-3} = -1000$. — le signe de l'exposant dit de quel côté de 1 on se place, pas le signe du résultat. Une puissance de 10 est toujours positive, qu'elle soit grande ou petite.

Le réflexe : lire l'exposant comme un déplacement de la virgule : $+3$ la déplace de trois rangs vers la droite, -3 de trois rangs vers la gauche.

2 Les trois règles de calcul

RÈGLE

Elles se retiennent par ce qu'elles font aux exposants : on **additionne** pour un produit, on **soustrait** pour un quotient, on **multiplie** pour une puissance de puissance.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

EXEMPLE

Les trois règles à l'œuvre, vérifiées par le calcul direct.

- ① Produit : les exposants s'ajoutent
 $10^3 \times 10^4 = 10^7$
- ② Quotient : ils se soustraient
 $\frac{10^5}{10^2} = 10^3$
- ③ Puissance de puissance : ils se multiplient
 $(10^2)^3 = 10^6$
- ④ Et cela vaut pour toute base, pas seulement 10
 $5^3 \times 5^2 = 5^5 = 3125$

les règles portent sur les exposants, jamais sur la base

Ces règles n'ont de sens qu'entre puissances de **même base**. $2^3 \times 5^2$ ne se simplifie pas : il n'y a rien à additionner.

3 La notation scientifique

DÉFINITION

Tout nombre s'écrit sous la forme $a \times 10^n$, où n est un entier relatif et où a est compris entre 1 et 10 — 10 exclu. Cette contrainte sur a est ce qui rend l'écriture **unique**, donc comparable d'un nombre à l'autre.

EXEMPLE

On déplace la virgule jusqu'à n'avoir qu'un seul chiffre non nul devant, et on compte les rangs.

- ① Un grand nombre : la virgule recule de 4 rangs
 $45\,000 = 4,5 \times 10^4$
- ② Un petit nombre : elle avance de 4 rangs
 $0,00032 = 3,2 \times 10^{-4}$

le signe de l'exposant dit si le nombre est grand ou petit

$$4,5 \times 10^4 = 45\,000$$

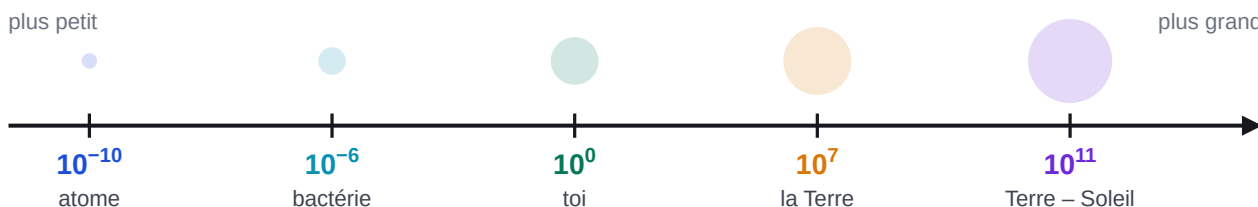
la virgule recule de 4 rangs

$$3,2 \times 10^{-4} = 0,00032$$

elle avance de 4 rangs

Le signe de l'exposant dit dans quel sens la virgule se déplace.

L'**ordre de grandeur** est la puissance de 10 seule. Il suffit à comparer : 10^{11} mètres et 10^{-10} mètres diffèrent de 21 rangs, ce qu'aucune lecture chiffre à chiffre ne fait apparaître.



Chaque graduation vaut un facteur 10 : d'un bout à l'autre, 21 rangs.

À RETENIR

- L'exposant **compte les facteurs**, il ne multiplie pas.
- Un exposant **négatif inverse**, il ne rend pas le nombre négatif.
- Produit → on **additionne** les exposants. Quotient → on **soustrait**. Puissance de puissance → on **multiplie**.
- Ces règles n'ont de sens qu'entre puissances de **même base**.
- Notation scientifique : $a \times 10^n$ avec a **entre 1 et 10**, 10 exclu.
- L'**ordre de grandeur** est la puissance de 10 seule : c'est ce qui permet de comparer.