COURS

3e

Sphère et boule — Repérage, sections et volumes

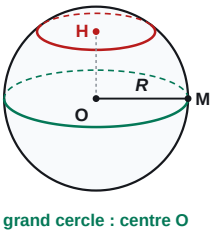
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Un ballon, une bille, un globe terrestre : tous ont la forme d'une **boule**, limitée par une **sphère**. Un centre O et un rayon R suffisent à les décrire : **la sphère est formée des points situés exactement à la distance R de O, la boule des points situés à une distance inférieure ou égale à R ; on se repère sur la sphère avec deux angles, la latitude et la longitude, et le volume de la boule vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$.**

1 Sphère, boule et repérage terrestre

DÉFINITION

La **sphère** de centre O et de rayon R est la **surface** formée des points M de l'espace tels que $OM = R$; la **boule** de centre O et de rayon R est le **solide** formé des points M tels que $OM \leq R$. Un **grand cercle** est un cercle tracé sur la sphère qui a **le même centre et le même rayon** qu'elle ; on l'obtient en coupant la sphère par un plan **qui passe par son centre**. Tout autre cercle tracé sur la sphère a un autre centre et un rayon plus petit.



Une boule se dessine par son contour ; ses cercles deviennent des ellipses.

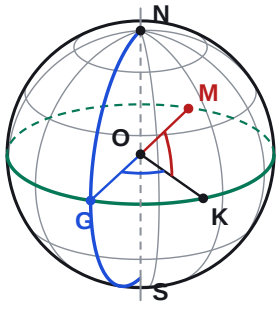
DÉFINITION

On assimile la Terre à une sphère de centre O, qui tourne autour de l'**axe des pôles** (NS). L'**équateur** est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à cet axe. Les **parallèles** sont les cercles de la sphère dont le plan est parallèle à celui de l'équateur : seul l'équateur est un grand cercle. Les **méridiens** sont les demi-cercles qui joignent les deux pôles : chacun est la moitié d'un grand cercle. Le **méridien de Greenwich** sert d'origine.

DÉFINITION

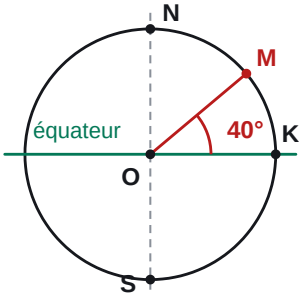
Soit M un point de la sphère terrestre, K le point de l'équateur sur le méridien de M, et G le point de l'équateur sur le méridien de Greenwich. La **latitude** de M est la mesure de $\widehat{KOM}$, de 0° à 90°, suivie de **N** ou **S**. Sa **longitude** est la mesure de $\widehat{GOK}$, de 0° à 180°, suivie de **E** ou **O**. On écrit la latitude en premier : M (40° N ; 50° E). Les points d'un même parallèle ont la même latitude, ceux d'un même méridien la même longitude ; aux pôles (90°), la longitude n'est pas définie.

le globe



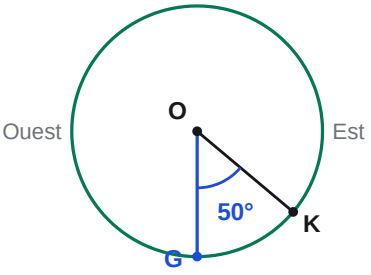
équateur
Greenwich

latitude : coupe par le méridien de M



M est à 40° au nord de l'équateur : 40° N

longitude : vue du dessus du pôle N



M est à 50° à l'est de Greenwich : 50° E

La latitude se lit dans le plan du méridien de M, la longitude dans le plan de l'équateur. Dans un pavé droit, il fallait trois nombres (rappel de 4e) ; sur la sphère, deux angles suffisent.

PLACER UN POINT DE COORDONNÉES DONNÉES

1. **Latitude** : N au-dessus de l'équateur, S au-dessous ; le point est sur ce parallèle (0° : équateur, 90° : pôle).
2. **Longitude** : E à droite du méridien de Greenwich sur un globe vu de face, pôle Nord en haut, O à gauche ; le point est sur ce méridien (180° : le méridien opposé).
3. Le point est à l'**intersection** du parallèle et du méridien. Contrôle : latitude au plus 90°, longitude au plus 180°, une lettre pour chacune.

EXEMPLE

On assimile la Terre à une sphère dont l'équateur mesure environ 40 000 km. Quelle distance sépare A (45° N ; 10° E) et B (15° S ; 10° E) en suivant le méridien ?

1. Même longitude : A et B sont sur le même méridien, de part et d'autre de l'équateur ; les latitudes s'ajoutent.
   $\widehat{AOB} = 45 + 15 = 60$
   en degrés
2. Un méridien est une moitié de grand cercle, et un grand cercle mesure, comme l'équateur, environ 40 000 km. L'arc est proportionnel à son angle :
   $\frac{60}{360} \times 40\,000 \approx 6\,666{,}7$

en suivant le méridien, A et B sont à environ 6 667 km l'un de l'autre.

PIÈGE

Écrire « la latitude de Sydney est 151° », ou « Sydney (34° ; 151°) ». — 151° est sa longitude : une latitude ne dépasse jamais 90°. Sans lettres, quatre points du globe conviennent.

Ce que ça coûte : le point est ailleurs sur le globe.

Le réflexe : latitude d'abord (0° à 90°, N ou S), longitude ensuite (0° à 180°, E ou O).

PIÈGE

Prendre un parallèle pour un grand cercle. — son centre est sur l'axe des pôles, mais pas en O : il est plus court que l'équateur, et d'autant plus qu'on s'approche d'un pôle.

Ce que ça coûte : une longueur fausse, parfois du simple au double.

Le réflexe : chercher le centre du cercle : est-ce O ?

PIÈGE

Dire qu'un point à 3 cm du centre d'une sphère de rayon 5 cm est « sur la sphère ». — sur la sphère, tous les points sont à 5 cm du centre. Celui-ci est **dans la boule**.

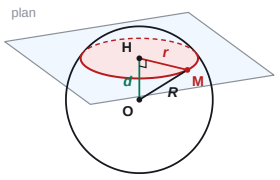
Ce que ça coûte : la réponse, et le vocabulaire de toute la rédaction.

Le réflexe : sphère : $OM = R$; boule : $OM \leq R$. On calcule le volume d'une **boule**.

2 Sections planes des solides

PROPRIÉTÉ

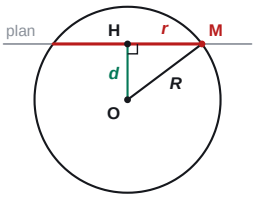
On coupe une sphère de centre O et de rayon R par un plan ; H est le point du plan le plus proche de O, et $d = OH$. Si $d < R$, la section est un **cercle de centre** H et de rayon r tel que $r^2 = R^2 - d^2$ (un grand cercle si $d = 0$). Si $d = R$, c'est le seul point H : le plan est **tangent** à la sphère. Si $d > R$, elle est vide. La section d'une **boule** est le **disque** correspondant. Propriété admise ; le rayon se justifie par Pythagore dans le triangle OHM, rectangle en H.



La section : un cercle de centre H.

CALCULER LE RAYON D'UNE SECTION DE BOULE

1. Nommer O le centre de la boule, H celui de la section, M un point du bord de la section.
2. Le triangle OHM est rectangle en H, avec $OM = R$ (car M est sur la sphère) et $OH = d$.
3. Pythagore : $HM^2 = OM^2 - OH^2$, puis la racine carrée, avec l'unité.



La vue en coupe.

EXEMPLE

Une boule de rayon 5 cm est coupée par un plan situé à 3 cm de son centre O. Quel est le rayon de la section ?

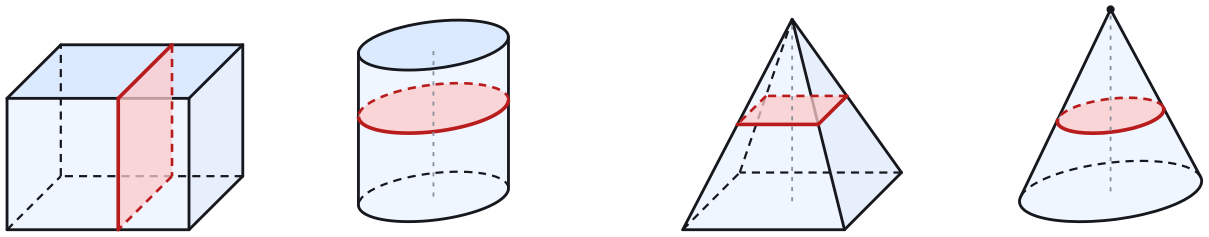
1. OHM est rectangle en H, avec $OM = 5$ cm et $OH = 3$ cm :
   $HM^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
2. Donc
   $HM = \sqrt{16} = 4$
   en cm

la section est un disque de centre H et de rayon 4 cm.

PROPRIÉTÉ

Autres sections (admises). **Pavé droit** : par un plan parallèle à une face, un rectangle identique à cette face ; par un plan parallèle à une arête, un rectangle dont un côté a la longueur de cette arête. **Cylindre** : parallèlement aux bases, un disque de même rayon ; parallèlement à l'axe, un rectangle dont un côté est la hauteur. **Pyramide** et **cône** de hauteur $[SH]$: par un plan parallèle à la base qui coupe $[SH]$ en H', une **réduction de la base** de rapport $k = \dfrac{SH'}{SH}$; longueurs multipliées par k, aire par k^2 (rappel de 4e).

pavé droit	**cylindre**	**pyramide**	**cône**
plan parallèle à une face	plan parallèle aux bases	plan parallèle à la base	plan parallèle à la base



Perspective cavalière : fuyantes parallèles à 45°, réduites de moitié, parties cachées en pointillés. Un cercle horizontal y devient une ellipse un peu inclinée.

DESSINER UNE SECTION EN PERSPECTIVE CAVALIÈRE

1. Dessiner le solide : face avant en vraie grandeur, fuyantes parallèles à 45° et multipliées par 0,5, arêtes cachées en pointillés.
2. Placer les points où le plan coupe les arêtes ou la hauteur, en reportant les longueurs (multipliées par 0,5 sur les fuyantes).
3. Joindre ces points face par face : trait plein sur une face vue, pointillés sur une face cachée. Un disque de section est la même ellipse que la base, translatée (cylindre) ou réduite de rapport k (cône).

EXEMPLE

Une pyramide a pour base un carré de 6 cm de côté et pour hauteur $SH = 9$ cm. Un plan parallèle à la base coupe $[SH]$ en H' avec $SH' = 3$ cm. Décrire la section.

1. C'est une réduction de la base de rapport $k = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$: côté $6 \times \dfrac{1}{3} = 2$ cm, aire $36 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 4$ cm².

la section est un carré de 2 cm de côté, d'aire 4 cm².

PIÈGE

Calculer le rayon de la section par $r = R - d$, soit « $5 - 3 = 2$ cm ». — R, d et r sont les trois côtés du triangle rectangle OHM, d'hypoténuse R : ils ne sont pas alignés. Le rayon vaut 4 cm.

Ce que ça coûte : le rayon et l'aire de la section.

Le réflexe : dessiner la coupe, coder l'angle droit en H, appliquer Pythagore.

PIÈGE

Tracer en trait plein la moitié arrière d'une section, ou des fuyantes non parallèles. — ce qui est derrière une surface vue est caché, et des arêtes parallèles dans l'espace restent parallèles sur le dessin.

Ce que ça coûte : une figure qui ne représente plus le solide.

Le réflexe : face vue : trait plein ; face cachée : pointillés ; toutes les fuyantes dans la même direction.

3 Volume de la boule et des assemblages

PROPRIÉTÉ

Le volume d'une boule de rayon R est $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3$ (formule **admise**). **Rappels** du cycle 4 : pavé droit, prisme droit et cylindre, $V = \mathcal{B} \times h$; pyramide et cône, $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$, où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur. Unités : $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.

CALCULER LE VOLUME D'UNE BOULE

1. Trouver le **rayon** : si l'énoncé donne le diamètre, le diviser par 2.
2. Calculer R^3, puis multiplier par $\dfrac{4}{3}$: c'est le coefficient de π.
3. Écrire la valeur exacte (par exemple 36π cm³), puis l'arrondi demandé, en fin de calcul, avec une unité **au cube**.

EXEMPLE

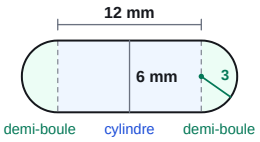
Calculer le volume d'une boule de rayon 3 cm, au dixième de cm³.

1. Le coefficient de π :
   $\frac{4}{3} \times 3^3 = \frac{4 \times 27}{3} = 36$
2. La valeur exacte, puis l'arrondi :
   $V = 36\pi \approx 113{,}1$

le volume de la boule est 36π cm³, soit environ 113,1 cm³.

CALCULER LE VOLUME D'UN ASSEMBLAGE

1. Décomposer l'objet en solides du cycle, à l'aide d'une vue en coupe, et relever les dimensions de chacun.
2. Calculer chaque volume en valeur exacte, sans oublier de diviser par 2 pour une demi-boule.
3. Additionner (ou soustraire un creux), arrondir, puis convertir si l'énoncé le demande.



Deux demi-boules de même rayon font une boule.

EXEMPLE

Une gélule est un cylindre de 12 mm de long et de 6 mm de diamètre, terminé à chaque bout par une demi-boule de même diamètre. Calculer son volume.

1. Le rayon commun est 3 mm. Le cylindre :
   $V_1 = \pi \times 3^2 \times 12 = 108\pi$
   en mm³
2. Les deux demi-boules forment une boule de rayon 3 mm :
   $V_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi$
3. On additionne, en mm³ :
   $V = 108\pi + 36\pi = 144\pi \approx 452{,}4$
4. Comme $1\ \text{cm}^3 = 1\,000\ \text{mm}^3$:
   $452{,}4 \div 1\,000 \approx 0{,}45$

la gélule a un volume de 144π mm³, soit environ 452,4 mm³ ou 0,45 cm³.

PIÈGE

Mettre le diamètre dans la formule : $\frac{4}{3} \times \pi \times 10^3$ pour une boule de diamètre 10 cm. — la formule demande le rayon, 5 cm. Avec le diamètre, le volume est $2^3 = 8$ fois trop grand.

Ce que ça coûte : un volume huit fois trop grand.

Le réflexe : écrire R = … avant toute formule.

PIÈGE

Écrire R^2 au lieu de R^3, ou croire qu'un rayon double donne un volume double. — un volume a trois dimensions : multiplier les longueurs par 2 multiplie le volume par $2^3 = 8$ (rappel de 4e).

Ce que ça coûte : le résultat et l'unité.

Le réflexe : trois longueurs multipliées, une unité au cube.

PIÈGE

Convertir 14 137 cm³ en « 141,37 L ». — $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$: on divise par 1 000, pas par 100.

Ce que ça coûte : la réponse au problème posé.

Le réflexe : une bouteille d'un litre contient 1 000 cm³.

À VÉRIFIER

- **Sphère** ($OM = R$) ou **boule** ($OM \leq R$) ? Latitude (au plus 90°, N ou S) puis longitude (au plus 180°, E ou O) ?
- Rayon d'une section de boule : Pythagore, pas une soustraction ? Parties cachées en pointillés ?
- Le **rayon**, et non le diamètre, au **cube** ? Valeur exacte, arrondi à la fin, 1 L = 1 000 cm³ ?

À RETENIR

- **Sphère** : les points à la distance R de O (une surface). **Boule** : les points à une distance au plus R (un solide).
- **Grand cercle** : centre O, rayon R, plan passant par O. L'équateur et les méridiens en font partie, les autres parallèles non.
- Coordonnées : la **latitude** (0° à 90°, N ou S) puis la **longitude** (0° à 180°, E ou O).
- Section d'une boule à la distance d du centre : un disque de rayon r, avec $r^2 = R^2 - d^2$ (Pythagore).
- $V_{\text{boule}} = \frac{4}{3}\pi R^3$: le **rayon**, au **cube** ; et $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$.