

# Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

3<sup>e</sup>

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Une équation à deux inconnues a une infinité de solutions :  $x + y = 9$  est vérifiée par une foule de couples. Il faut une **seconde information** pour n'en garder qu'un. C'est exactement ce que fait un système — et c'est ce qui permet de retrouver deux prix à partir de deux tickets de caisse.

## 1 Ce qu'est une solution

### DÉFINITION

Une solution est un **couple**  $(x ; y)$  qui vérifie les deux équations **en même temps**. Vérifier une seule des deux ne prouve rien : c'est la simultanéité qui fait la solution.

### EXEMPLE

Le couple  $(4 ; 5)$  est-il solution du système formé de  $2x + 3y = 23$  et  $x + y = 9$  ?

- ① Première équation  
 $2 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23$
- ② Seconde équation  
 $4 + 5 = 9$

**les deux sont vérifiées :  $(4 ; 5)$  est bien solution**

Vérifier un couple donné est toujours plus rapide que résoudre. Quand l'énoncé propose une réponse, on la teste — c'est un point gagné en trois lignes.

## 2 Méthode 1 — la substitution

### QUAND UNE INCONNUE EST DÉJÀ ISOLÉE, OU PRESQUE

- ① Je repère l'équation où une inconnue s'isole sans fraction. Dans  $x + y = 9$ , j'écris  $x = 9 - y$ .
- ② Je **remplace**  $x$  par  $9 - y$  dans l'autre équation :  $2(9 - y) + 3y = 23$ .
- ③ Je développe et je réduis :  $18 - 2y + 3y = 23$ , donc  $18 + y = 23$ , donc  $y = 5$ .
- ④ Je reviens à l'expression isolée pour trouver l'autre inconnue.  
 $x = 9 - 5 = 4$   
la solution est le couple  $(4 ; 5)$

### LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

**Répondre «  $y = 5$  » et s'arrêter là.** — la solution d'un système à deux inconnues est un **couple**. Une seule valeur ne résout rien, et la moitié du travail n'est pas faite.

**Le réflexe :** écrire la réponse sous la forme  $(x ; y) = (\dots ; \dots)$ , puis vérifier ce couple dans les **deux** équations de départ.

## 3 Méthode 2 — la combinaison

### QUAND LES COEFFICIENTS S'Y PRÊTENT

- ① Je regarde les coefficients d'une même inconnue. Dans  $3x + 2y = 18$  et  $5x - 2y = 14$ , ceux de  $y$  sont opposés.
- ② J'**additionne** les deux équations membre à membre : les termes en  $y$  disparaissent et il reste  $8x = 32$ .
- ③ Je résous.  
 $x = \frac{32}{8} = 4$
- ④ Je remplace dans l'une des équations de départ :  $12 + 2y = 18$ , donc  $y = 3$ .  
 $3 \times 4 + 2 \times 3 = 12 + 6 = 18$
- ⑤ Je vérifie dans l'autre.  
 $5 \times 4 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14$   
la solution est  $(4 ; 3)$

Si aucun coefficient ne s'oppose, on **multiplie** l'une des équations — ou les deux — pour les rendre opposés. C'est toujours possible, et c'est ce qui rend la combinaison plus systématique que la substitution.

#### 4 Ce que le graphique montre

##### RÈGLE

Chaque équation représente une **droite**. Le couple solution est le **point d'intersection**. Deux droites sécantes se coupent en un point : une seule solution. Deux droites parallèles ne se coupent pas : aucune solution. Deux droites confondues : une infinité.

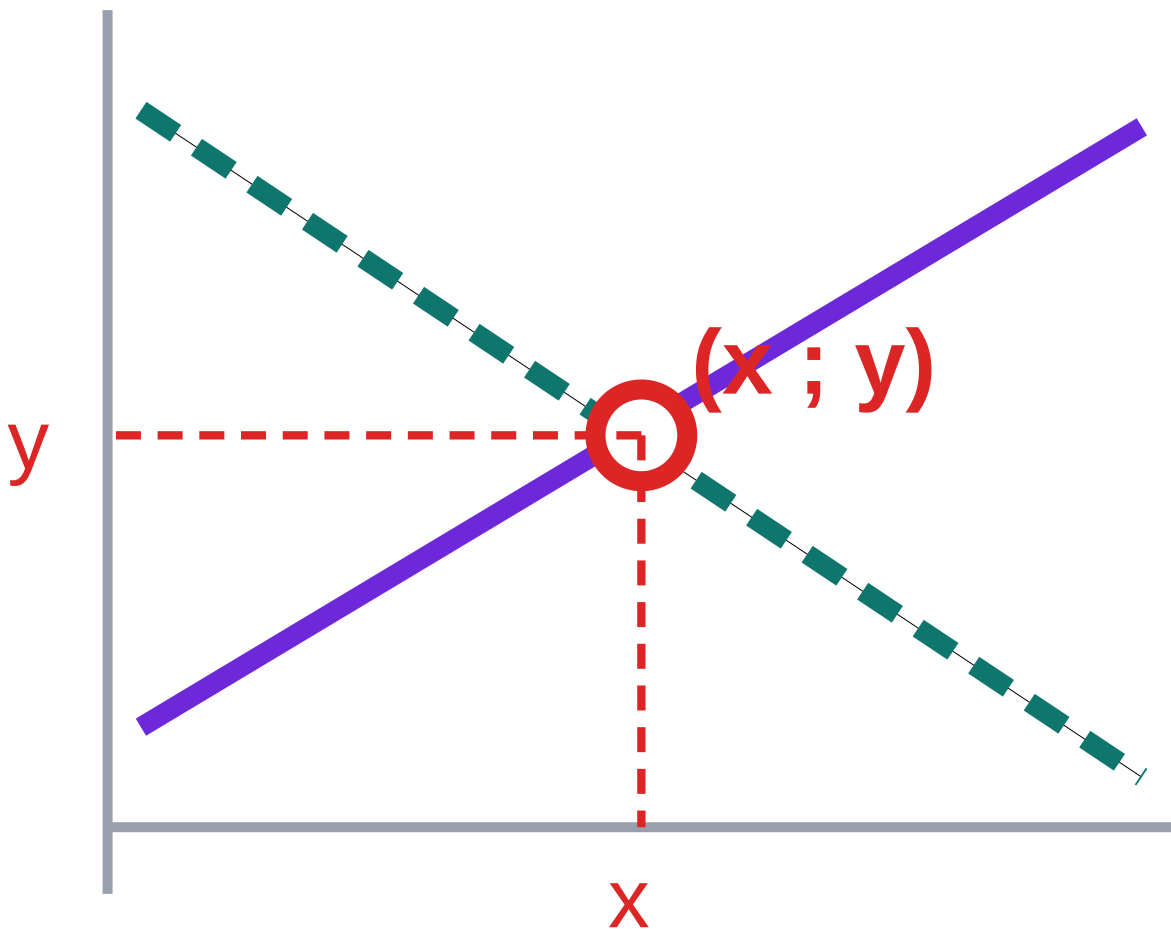
 +  = 7,60 €

$$3c + 2p = 7,60$$

 +  = 12,20 €

$$5c + 3p = 12,20$$

Deux tickets de caisse suffisent à retrouver deux prix.



Un seul point appartient aux deux droites : c'est le couple solution.

La lecture graphique donne une solution approchée et un contrôle immédiat. Elle ne remplace pas le calcul, qui seul donne la valeur exacte.

##### À RETENIR

- Une solution est un **couple**  $(x ; y)$  qui vérifie les **deux** équations à la fois.
- **Substitution** : on isole une inconnue, on la remplace dans l'autre équation.
- **Combinaison** : on additionne ou on soustrait pour faire disparaître une inconnue.
- Si aucun coefficient ne s'oppose, on multiplie une équation — c'est toujours possible.
- Graphiquement, la solution est le **point d'intersection** de deux droites.
- Dans un problème, **nommer les inconnues** avant de poser le système : c'est le point le plus souvent perdu.