

COURS

Théorème de Pythagore et sa réciproque

3^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Le théorème a été vu en 4^e dans le plan. En 3^e il change de terrain : il sert **dans l'espace**, il se combine à la trigonométrie, et sa réciproque devient un outil de démonstration à part entière. C'est l'un des chapitres les plus régulièrement mobilisés au brevet, rarement pour lui-même — presque toujours comme première étape d'un problème plus long.

1 Ce qu'il faut avoir en tête sans hésiter

PROPRIÉTÉ

Si le triangle ABC est rectangle en A , alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

RÈGLE

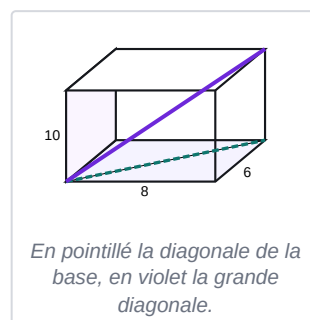
Réciproque — si $[BC]$ est le plus grand côté et si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle en A . C'est le seul moyen de *démontrer* qu'un angle est droit : un dessin ne prouve rien.

Chercher l'hypoténuse → **additionner**. Chercher un côté de l'angle droit → **soustraire**. Les triplets (3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13), (8 ; 15 ; 17) et leurs multiples évitent souvent tout calcul.

2 Dans l'espace : deux triangles au lieu d'un

LA GRANDE DIAGONALE D'UN PAVÉ DROIT

- ① La difficulté n'est pas le calcul mais le **repérage** : la grande diagonale n'appartient à aucune face. On l'atteint en deux temps, avec deux triangles rectangles successifs.
- ② Premier triangle, dans la base : la diagonale de la face du bas, pour un pavé de 8 sur 6.
 $d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
 $d = 10$
- ③ Second triangle, vertical : cette diagonale devient un côté de l'angle droit, la hauteur 10 est l'autre.
 $D^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$
- ④ On conclut.
 $D = \sqrt{200} \approx 14,14$
environ 14,1 unités



LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Additionner directement les trois dimensions au carré sans passer par la diagonale de la base. — le résultat est juste par hasard dans le pavé droit, mais la méthode ne se transpose ni à la pyramide ni au cône. Ce qui est évalué, c'est le **repérage des deux triangles**, pas la formule.

Le réflexe : nommer les deux triangles rectangles et dire où se trouve chaque angle droit **avant** d'écrire la moindre égalité.

3 Dans une pyramide

EXEMPLE

Pyramide à base carrée de côté 12, de hauteur 8, dont le sommet est à la verticale du centre de la base.

- ① L'**apothème** — la hauteur d'une face — s'obtient avec la hauteur et la moitié du côté.

$$a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$a = 10$$

- ② L'**arête latérale** demande d'abord la demi-diagonale de la base.

$$m^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$$

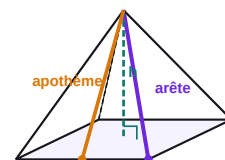
- ③ Puis un second triangle rectangle, avec la hauteur.

$$\ell^2 = 72 + 8^2 = 72 + 64 = 136$$

- ④ On conclut.

$$\ell = \sqrt{136} \approx 11,66$$

apothème 10 · arête latérale $\approx$ 11,7



L'apothème vise le milieu d'un côté, l'arête un sommet.

Apothème et arête ne se confondent pas : le premier va au **milieu d'un côté** de la base, le second à un **sommet**. Ils ne mobilisent pas le même triangle, et c'est la source d'erreur la plus fréquente du chapitre.

4 Avec la trigonométrie

Dès qu'un **angle** figure dans les données ou dans la question, Pythagore ne suffit plus : c'est le cosinus, le sinus ou la tangente qu'il faut. À l'inverse, un problème où n'apparaissent que des longueurs relève de Pythagore. Beaucoup d'exercices de brevet enchaînent les deux — Pythagore pour une longueur manquante, puis la trigonométrie pour l'angle.

EXEMPLE

Un exercice de brevet enchaîne presque toujours les deux outils. Dans un triangle rectangle en A avec $AB = 12$ et $AC = 5$, on demande BC puis l'angle en B .

- ① Que des longueurs : c'est Pythagore.

$$BC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

- ② On prend la racine.

$$BC = \sqrt{169} = 13$$

- ③ Un angle est maintenant demandé : on change d'outil. Vu de B , l'opposé vaut 5 et l'adjacent 12, sans l'hypoténuse — donc la tangente.

$$\tan(B) = \frac{5}{12} \approx 0,417$$

- ④ La touche inverse de la calculatrice donne l'angle : environ $22,6^\circ$, soit 23° au degré près.

BC = 13 et l'angle en B mesure environ 23°

À VÉRIFIER

- Ai-je nommé le triangle rectangle **et** dit où se trouve l'angle droit ?
- L'hypoténuse est-elle bien seule de son côté du signe égal ?
- Dans l'espace, ai-je traité **deux** triangles successifs, et dit lesquels ?
- Ai-je gardé les valeurs exactes jusqu'à la dernière ligne ?
- Ma réponse a-t-elle une unité, et est-elle vraisemblable ?

À RETENIR

- Chercher l'hypoténuse → **additionner**. Chercher un autre côté → **soustraire**.
- La **réci-proque** est le seul moyen de démontrer qu'un angle est droit.
- Dans l'espace, on procède en **deux triangles rectangles successifs**, jamais en un seul calcul.
- **Apothème** au milieu d'un côté, **arête** à un sommet : deux triangles différents.
- Un **angle** dans l'énoncé appelle la trigonométrie ; que des longueurs, c'est Pythagore.
- On n'arrondit qu'à la toute fin : un arrondi précoce peut inverser la conclusion.