

COURS

Théorème de Thalès et sa réciproque

3^e

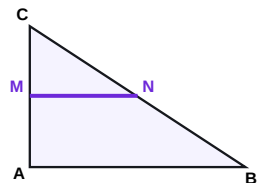
Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Pythagore mesure ce qu'on ne peut pas atteindre dans un triangle rectangle. Thalès va plus loin : il mesure **sans aucun angle droit**, en comparant des rapports. C'est l'outil de l'arpenteur — la hauteur d'un arbre par son ombre, la largeur d'une rivière depuis la berge — et celui de tout agrandissement à l'échelle.

1 Reconnaître la configuration

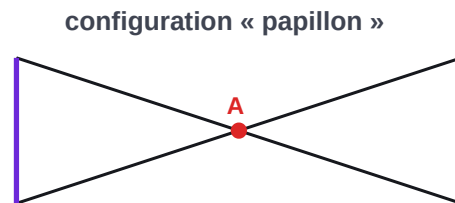
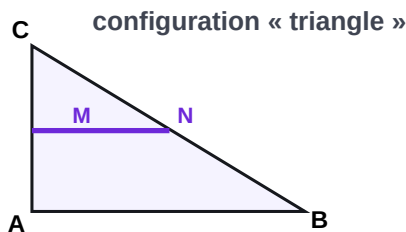
DÉFINITION

Deux droites **sécantes** en A sont coupées par deux droites **parallèles**. Le théorème ne dit rien sans ces deux conditions : sécantes, et parallèles. Un dessin qui « ressemble » à la configuration ne suffit pas — le parallélisme doit être donné ou démontré.



(MN) parallèle à (BC) : les points se correspondent dans l'ordre A, M, B et A, N, C .

L'ordre des lettres n'est pas décoratif : il dit quel segment correspond à quel autre. Écrire les rapports en désordre est la première cause d'erreur du chapitre.



Même théorème, deux dessins : le sommet commun peut être à l'extérieur ou entre les parallèles.

2 Le théorème

PROPRIÉTÉ

Si (MN) est parallèle à (BC) , alors les trois rapports sont égaux :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

CALCULER UNE LONGUEUR MANQUANTE

- ① J'écris les trois rapports dans l'ordre des sommets : AM/AB , AN/AC , MN/BC .
- ② Je ne garde que les deux rapports où figure l'inconnue et où tout le reste est connu. Avec $AM = 6$, $AB = 8$ et $AC = 12$:
- ③ Je passe au produit en croix.

$$AN = \frac{12 \times 6}{8} = 9$$
donc $AN = 9$ cm
- ④ Même travail pour le troisième segment, avec $BC = 10$.

$$MN = \frac{10 \times 6}{8} = 7,5$$
donc $MN = 7,5$ cm

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $AM/AB = AN/CN$ au lieu de AN/AC . — le rapport se prend toujours entre un petit segment et le **grand segment entier**, jamais entre les deux morceaux. AB contient AM , AC contient AN : ce sont les entiers qui se répondent.

Le réflexe : écrire les trois rapports au brouillon **avant** de chercher l'inconnue, en partant chaque fois du sommet commun A .

3 La réciproque : démontrer un parallélisme

RÈGLE

Si les points A, M, B et A, N, C sont alignés **dans le même ordre** et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN) est parallèle à (BC) .

EXEMPLE

Avec $AM = 6$, $AB = 8$, $AN = 9$ et $AC = 12$, on calcule les deux rapports séparément.

① Premier rapport
 $\frac{6}{8} = 0,75$

② Second rapport
 $\frac{9}{12} = 0,75$

les rapports sont égaux : (MN) est parallèle à (BC)

EXEMPLE

Avec $AM = 4$, $AB = 6$, $AN = 5$ et $AC = 8$, le même travail conclut l'inverse.

① Premier rapport
 $\frac{4}{6} \approx 0,67$

② Second rapport
 $\frac{5}{8} = 0,625$

③ On compare
 $0,67 \neq 0,625$

les droites ne sont pas parallèles

Comme pour Pythagore, les deux rapports se calculent **séparément** puis se comparent. Poser l'égalité d'emblée reviendrait à supposer vrai ce qu'on veut démontrer.

4 Agrandissement et réduction

RÈGLE

Un agrandissement ou une réduction de coefficient k multiplie **toutes les longueurs** par k , les **aires** par k^2 et les **volumes** par k^3 .

EXEMPLE

Une figure de 15 cm de côté et 40 cm² d'aire est réduite au coefficient 0,6.

① La longueur
 $15 \times 0,6 = 9$

② L'aire, multipliée par le carré du coefficient
 $40 \times 0,6^2 = 40 \times 0,36 = 14,4$

9 cm de côté et 14,4 cm² d'aire

À RETENIR

- Thalès exige deux droites **sécantes** coupées par deux **parallèles** — les deux conditions, pas une.
- Les rapports se prennent toujours du sommet commun vers le **segment entier**.
- La **réciproque** démontre un parallélisme : on calcule les deux rapports séparément, puis on compare.
- Un coefficient k multiplie les longueurs par k , les aires par k^2 , les volumes par k^3 .
- Un parallélisme lu sur un dessin n'est jamais une donnée.