

COURS

Transformations du plan

3^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, ajusté au BO du 26 juillet 2018

Au brevet, la question n'est presque jamais « construis l'image » : c'est « **quelle transformation, et avec quels éléments** ». Et c'est là que les points partent. « C'est une rotation » ne vaut rien ; « la rotation de centre O , d'angle 90° , dans le sens des aiguilles d'une montre » vaut tout. Une transformation ne se nomme jamais seule — elle se nomme avec ce qui la définit.

1 Quatre transformations, et une seule change les tailles

RÈGLE

Ce qu'il faut pour définir chacune. La **symétrie axiale** : un **axe**. La **symétrie centrale** : un **centre**. La **translation** : un **vecteur** — direction, sens, longueur. La **rotation** : un **centre**, un **angle** et un **sens**. L'**homothétie** : un **centre** et un **rapport k** .

PROPRIÉTÉ

Les quatre premières **conservent tout** : longueurs, angles, aires, parallélisme. Seule l'**homothétie** agrandit ou réduit — et c'est pour cela qu'elle se traite à part. Même elle conserve les angles et le parallélisme : elle change les tailles, jamais les formes.

Symétrie axiale

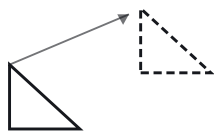
un axe

(d)



Translation

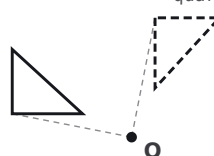
un vecteur



Rotation

un centre, un angle, un sens

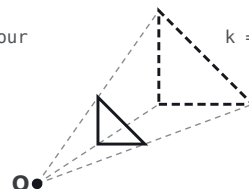
quart de tour



Homothétie

un centre, un rapport k

$k = 2$



Le même triangle, transformé quatre fois. Trait plein : la figure de départ. Pointillés : son image. Les rayons issus de O montrent le rôle du centre — et seule l'homothétie change la taille.

2 Reconnaître en dix secondes

QUATRE QUESTIONS, DANS CET ORDRE

- ① Les tailles sont-elles différentes ? → **homothétie**. C'est la seule. Ce test se pose en premier parce qu'il élimine d'un coup les quatre autres.
- ② Sinon, la figure a-t-elle tourné ? → **rotation**.
- ③ Sinon, est-elle retournée comme dans un miroir ? → **symétrie axiale**. C'est le test qu'on oublie : dans une symétrie axiale, on ne peut pas superposer les deux figures en faisant glisser la feuille, il faut la retourner.
- ④ Sinon, a-t-elle simplement glissé ? → **translation**.
- ⑤ Le signal, dans l'énoncé : « image de », « transformée en », « motif répété », ou un dessin de frise, de pavage, de rosace.

La **symétrie centrale** est le cas particulier des deux mondes : c'est à la fois une rotation d'un demi-tour et l'homothétie de rapport -1 . Si vous hésitez entre elle et une rotation, les deux réponses décrivent le même mouvement — mais le barème attend le nom que l'énoncé induit.

3 L'homothétie : ce qui change, et de combien

DÉFINITION

La transformation qui place l'image A' de chaque point A sur la droite (OA) , à la distance $OA' = |k| \times OA$. Le **rapport s'applique à la distance au centre**, pas à la longueur des côtés — que les côtés soient eux aussi multipliés par $|k|$ en est une conséquence, pas la définition.

PROPRIÉTÉ

Un rapport k multiplie les **longueurs** par k , les **aires** par k^2 et les **volumes** par k^3 . Les angles, eux, ne changent pas.

$$L \times k \quad \bullet \quad A \times k^2 \quad \bullet \quad V \times k^3$$

RÈGLE

Le signe de k dit de quel côté. $k > 0$: l'image est du **même côté** du centre que la figure de départ. $k < 0$: elle est de **l'autre côté**, et retournée. $k = -1$: c'est exactement la **symétrie centrale**. $|k| > 1$ agrandit, $|k| < 1$ réduit.

EXEMPLE

ABC est un triangle et O un point extérieur. Construire l'image de ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

- ① Je trace la demi-droite $[OA)$. Avec k positif, l'image est du même côté : une demi-droite suffit.
- ② Je place A' sur $[OA)$ tel que $OA' = 2 \times OA$. Le compas reporte la longueur OA une seconde fois à partir de A .
- ③ Je répète pour B et pour C , puis je trace le triangle $A'B'C'$.
- ④ **Vérification** : les côtés sont doublés, par exemple $A'B' = 2 \times AB$. Et les traits de construction restent sur la figure — ils sont notés.

$$OA' = 2 \times OA$$

4 Nommer, et nommer complètement

RÈGLE

Une réponse qui ne nomme pas les éléments n'est pas une réponse. « Une rotation » → « la rotation de centre O , d'angle 60° , dans le sens des aiguilles d'une montre ». « Une translation » → « la translation qui transforme A en B ». « Une homothétie » → « l'homothétie de centre O et de rapport 2,5 ». « Une symétrie » → « la symétrie **axiale** d'axe (d) » ou « **centrale** de centre I ».

Pour une rotation, le **sens est obligatoire** : 60° dans le sens des aiguilles d'une montre et 60° dans le sens inverse donnent deux images différentes. Un angle sans sens décrit deux figures, donc aucune.

EXEMPLE

Dans un pavage, le motif M_2 se déduit du motif M_1 . Les deux ont la même taille. M_2 est orienté différemment et ne peut pas être amené sur M_1 en faisant glisser la feuille. Quelle transformation, et avec quels éléments ?

- ① Les deux motifs ont la même taille : **ce n'est pas une homothétie**. Le premier test élimine la seule transformation qui change les dimensions.
- ② M_1 ne peut pas être amené sur M_2 par glissement : ce n'est **ni une translation, ni une rotation**, puisque toutes deux se font sans retourner la feuille.
- ③ C'est donc une **symétrie axiale**. Reste à donner l'axe : c'est la **médiatrice de $[PP']$** , où P' est l'image d'un point P du motif.
- ④ **La phrase attendue** : « M_2 est l'image de M_1 par la symétrie axiale d'axe la médiatrice de $[PP']$. » Nommer sans l'axe vaut la moitié des points.

symétrie axiale d'axe la médiatrice de $[PP']$

5 Aggrandir : les aires et les volumes ne suivent pas les longueurs

EXEMPLE

Une maquette de bâtiment est une réduction du bâtiment réel au rapport $\frac{1}{50}$. La façade de la maquette a une aire de 240 cm^2 et son volume est de $1\,800 \text{ cm}^3$. Quelles sont l'aire de la façade réelle, en m^2 , et le volume réel, en m^3 ?

- ① **Le sens du coefficient.** L'énoncé donne $\frac{1}{50}$ pour aller du réel à la maquette ; on fait l'inverse, donc $k = 50$.
- ② On écrit les trois lignes avant de choisir, et on calcule les deux coefficients séparément.
 $50^2 = 2500$
et $50^3 = 125000$
- ③ L'aire, en multipliant par k^2 .
 $240 \times 2500 = 600000$
 $600\,000 \text{ cm}^2$
- ④ Le volume, en multipliant par k^3 .
 $1800 \times 125000 = 225000000$
 $225\,000\,000 \text{ cm}^3$
- ⑤ **Les conversions d'aires et de volumes ne se font pas par 100.** Un rang d'unité vaut $\times 100$ pour une aire, $\times 1\,000$ pour un volume : $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$ et $1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$.
 $600000/10000 = 60$
et $225000000 / 1000000 = 225$
- ⑥ **Réponse rédigée** : la façade réelle mesure 60 m^2 et le bâtiment 225 m^3 .
 60 m^2 et 225 m^3

6 Les pièges qui coûtent des points

PIÈGE

Multiplier une aire par k au lieu de k^2 : écrire $240 \times 50 = 12\,000 \text{ cm}^2$. — le coefficient est donné en longueurs, et on l'applique tel quel.

Ce que ça coûte : Toute la question, et elle revient presque chaque année.

Le réflexe : Écrire les trois lignes $k / k^2 / k^3$ **avant** de choisir. Une aire a deux dimensions, un volume en a trois.

PIÈGE

Nommer la transformation sans ses éléments : « c'est une rotation ». — la bonne transformation est identifiée, on croit avoir répondu.

Ce que ça coûte : La moitié des points de la question, systématiquement.

Le réflexe : La phrase doit contenir **un centre, et un angle, et un sens** — ou un axe, ou un vecteur. S'il n'y a qu'un mot, il manque la réponse.

PIÈGE

Oublier le sens d'une rotation : « rotation de centre O et d'angle 90° ». — l'angle semble suffire à décrire le mouvement.

Ce que ça coûte : Une figure construite du mauvais côté, et la question avec.

Le réflexe : Deux images différentes existent pour le même angle. **Le sens fait partie de la définition**, pas du commentaire.

PIÈGE

Placer A' tel que $AA' = k \times AB$, en prenant un côté au lieu de la distance au centre. — le rapport parle de longueurs, et les côtés sont les longueurs visibles.

Ce que ça coûte : Toute la construction, et les questions qui s'appuient dessus.

Le réflexe : $OA' = k \times OA$: le **centre** est dans toutes les mesures, il n'est jamais absent.

PIÈGE

Croire qu'une homothétie déforme : « l'image d'un triangle rectangle n'est plus rectangle ». — la figure change de taille, donc on la croit changée en tout.

Ce que ça coûte : Une conclusion fautive au milieu d'une démonstration.

Le réflexe : Une homothétie **conserve les angles et le parallélisme**. C'est exactement ce qui la rend utile pour démontrer.

7 Avant de rendre

À VÉRIFIER

- Ai-je **nommé la transformation ET ses éléments** ?
- Pour une rotation : le **centre**, l'**angle** et le **sens** ?
- Pour une symétrie : ai-je précisé **axiale** ou **centrale** ?
- Pour une homothétie : le rapport s'applique-t-il aux **distances au centre** ?
- Les tailles ont-elles changé ? Si oui, c'est une **homothétie**, et rien d'autre.
- S'il y a un agrandissement : k^2 **pour les aires**, k^3 **pour les volumes** ?
- Mes conversions d'aires sont-elles en $\times 100$ par rang, celles de volumes en $\times 1\,000$?
- Mes **traits de construction** sont-ils restés sur la figure ?

À RETENIR

- Cinq transformations ; **seule l'homothétie change les tailles**.
- Une transformation se nomme **avec ses éléments** : centre, angle, sens — axe — vecteur — rapport.
- Homothétie : $OA' = k \times OA$, la distance **au centre**.
- Longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$. Les angles ne changent pas.
- $k = -1$, c'est la symétrie centrale ; $k < 0$, l'image passe de l'autre côté.
- Conversions : $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$, $1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$.