CORRIGÉ

Triangles semblables — Angles égaux et côtés proportionnels

3e

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Lire les angles marqués

1. a. Les triangles PQR et UST ont deux angles égaux deux à deux, $\widehat{P} = \widehat{U}$ et $\widehat{Q} = \widehat{S}$: ils sont semblables.
   la somme des angles vaut 180° : les troisièmes angles $\widehat{R}$ et $\widehat{T}$ sont égaux aussi.
2. b. P correspond à U, Q à S, et donc R à T.
3. c. Les côtés homologues : $[PQ]$ et $[US]$, $[QR]$ et $[ST]$, $[PR]$ et $[UT]$.
   $\frac{US}{PQ} = \frac{ST}{QR} = \frac{UT}{PR}$
   chaque côté est opposé à un angle, son homologue à l'angle égal : $[QR]$, opposé à $\widehat{P}$, va avec $[ST]$, opposé à $\widehat{U}$.

2 Semblables ou non ?

1. a. On range : 6 < 8 < 10 pour ABC, 9 < 12 < 15 pour DEF, et on calcule les trois quotients.
   $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = 1{,}5$
2. Les trois quotients sont égaux : ABC et DEF sont semblables, de coefficient 1,5.
   les homologues sont $[AB]$ et $[EF]$, $[AC]$ et $[DE]$, $[BC]$ et $[DF]$.
3. b. On range : 5 < 6 < 8 et 7 < 9 < 12.
   $\frac{7}{5} = 1{,}4$
   alors que $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = 1{,}5$.
4. Un quotient diffère : GHI et JKL ne sont pas semblables.
   deux quotients égaux ne suffisent pas : il en faut trois.

3 Démontrer par les angles

1. a. Dans ABC :
   $180 - 50 - 70 = 60$
   donc $\widehat{C} = 60^\circ$.
2. Ainsi $\widehat{B} = \widehat{E} = 70^\circ$ et $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ$: deux paires d'angles égaux, donc ABC et DEF sont semblables.
3. b. B correspond à E, C à D, donc A à F. L'homologue de $[AB]$ est $[FE]$.
   on vérifie : $\widehat{F} = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ = \widehat{A}$.
4. c. Le coefficient :
   $k = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$
5. Le périmètre est multiplié par k, soit 1,5.
   chaque côté est multiplié par 1,5, donc leur somme aussi.
6. L'aire est multipliée par k^2 :
   $1{,}5^2 = 2{,}25$

4 Construire un triangle semblable

1. a. On multiplie chaque côté par 1,5 :
   $DE = 1{,}5 \times 4 = 6$
   puis $DF = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5$ cm et $EF = 1{,}5 \times 6 = 9$ cm.
2. b. On trace $[EF]$ de 9 cm, puis un arc de centre E et de rayon 6 cm et un arc de centre F et de rayon 4,5 cm ; ils se coupent en D.
   le triangle existe : $6 + 4{,}5 = 10{,}5$ dépasse 9 (inégalité triangulaire).
3. c. On mesure environ 117° pour les deux angles. C'était prévisible : DEF et ABC sont semblables, donc leurs angles homologues sont égaux.
   la mesure ne prouve rien ; c'est la propriété caractéristique qui garantit l'égalité.

5 Repérer l'erreur

1. La correspondance : A et E, B et F, donc C et D. Le coefficient de Léo est juste, car $[AB]$ et $[EF]$ sont bien homologues.
2. a. Léo a associé les côtés dans l'ordre des lettres. Or $[BC]$ est opposé à $\widehat{A}$: son homologue est le côté opposé à $\widehat{E}$, c'est-à-dire $[DF]$, et non $[DE]$.

   de même, l'homologue de $[AC]$, opposé à $\widehat{B}$, est $[DE]$, opposé à $\widehat{F}$.
3. b. Les bons calculs :

   $DF = 0{,}75 \times 12 = 9$

   et $DE = 0{,}75 \times 10 = 7{,}5$.
4. Conclusion : $DF = 9$ cm et $DE = 7{,}5$ cm. Léo a échangé les deux résultats.

---

6 Vrai ou faux ? Justifie.

1. a. **Vrai.** Leurs angles mesurent tous 60° : ils ont leurs angles égaux deux à deux.
2. b. **Faux.** Un triangle rectangle isocèle a deux angles de 45° ; un triangle rectangle qui a un angle de 30° a pour angles 90°, 30° et 60°. Leurs angles ne sont pas égaux deux à deux : ils ne sont pas semblables.
3. c. **Vrai.** Les deux angles à la base mesurent chacun la même chose dans les deux triangles :

   $(180 - 40) \div 2 = 70$

   les angles sont 40°, 70°, 70° dans les deux triangles.
4. d. **Faux.** Les côtés 3, 4, 5 deviennent 5, 6, 7 : $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $\frac{6}{4} = 1{,}5$ ne sont pas égaux.
5. e. **Faux.** L'aire est multipliée par k^2 :

   $3^2 = 9$

   l'aire est neuf fois plus grande.
6. f. **Faux.** Ils sont semblables, pas forcément égaux : un triangle équilatéral de côté 2 cm et un autre de côté 5 cm ont les mêmes angles.

---

7 Le fanion agrandi

1. a. Le plus grand côté correspond au plus grand côté :

   $k = \frac{80}{50} = 1{,}6$
2. Les autres côtés :

   $30 \times 1{,}6 = 48$

   et $40 \times 1{,}6 = 64$: le grand fanion mesure 48 cm, 64 cm et 80 cm.
3. b. D'une part $50^2 = 2\,500$, d'autre part :

   $30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500$

   d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle ; le côté de 50 cm est l'hypoténuse.
4. Son aire, avec les deux côtés de l'angle droit :

   $30 \times 40 \div 2 = 600$

   600 cm².
5. c. L'aire est multipliée par k^2, pas par k :

   $1{,}6^2 = 2{,}56$

   il faut 2,56 fois plus de tissu.
6. Première façon :

   $600 \times 2{,}56 = 1\,536$
7. Seconde façon, avec les côtés de l'angle droit du grand fanion :

   $48 \times 64 \div 2 = 1\,536$

   le grand fanion mesure 1 536 cm².

---

8 La hauteur du triangle rectangle

1. a. D'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
donc $BC = 10$ cm.

2. b. Les triangles HBA et ABC ont l'angle $\widehat{B}$ en commun, et $\widehat{BHA} = \widehat{BAC} = 90^\circ$: deux paires d'angles égaux, ils sont semblables.

3. Correspondance : H et A (angles droits), B et B, donc A et C.
$\frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC} = \frac{HA}{AC}$
les quotients sont formés colonne par colonne : HBA en haut, ABC en bas.

4. c. Le coefficient vaut $\frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
$BH = 0{,}6 \times 6 = 3{,}6$
$BH = 3{,}6$ cm.

5. De même :
$AH = 0{,}6 \times 8 = 4{,}8$
$AH = 4{,}8$ cm.

6. d. Avec les côtés de l'angle droit :
$6 \times 8 \div 2 = 24$

7. Avec la base $[BC]$ et la hauteur $[AH]$:
$10 \times 4{,}8 \div 2 = 24$
les deux aires sont égales : $AH = 4{,}8$ cm est confirmé.

8. Conclusion : $BC = 10$ cm, $BH = 3{,}6$ cm et $AH = 4{,}8$ cm.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Justifier « semblables » par deux paires d'angles égaux ou par trois quotients égaux	2 pts	Une seule paire d'angles, deux quotients seulement, ou des angles lus sur le dessin
Écrire la correspondance des sommets et les côtés homologues	2 pts	Associer les côtés dans l'ordre des lettres au lieu de les mettre face aux angles égaux
Calculer le coefficient et les longueurs manquantes	2 pts	Un coefficient dans le mauvais sens, ou arrondi avant la fin du calcul
Calculer une aire avec le coefficient au carré	1 pt	Multiplier l'aire par k au lieu de k^2
Conclure par une phrase avec l'unité	1 pt	Un nombre seul, sans unité ni réponse à la question posée