3e

COURS

Triangles semblables — Angles égaux et côtés proportionnels

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

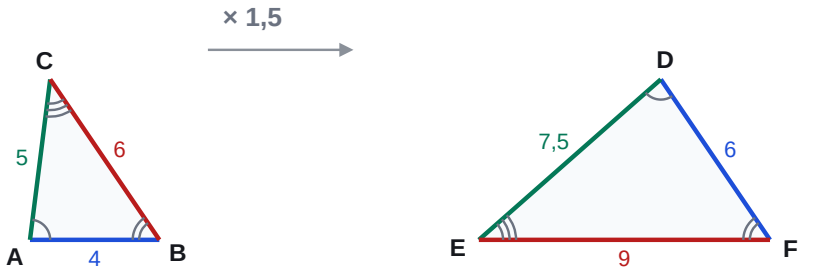
Deux triangles peuvent avoir exactement la même forme sans avoir la même taille : l'un est alors un agrandissement ou une réduction de l'autre, et on les dit **semblables**. Tout le chapitre repose sur une équivalence : **des côtés proportionnels, c'est la même chose que des angles égaux deux à deux.** Les angles servent à reconnaître deux triangles semblables ; la proportionnalité sert à calculer leurs longueurs.

1 Même forme, longueurs proportionnelles

DÉFINITION

Deux triangles sont **semblables** lorsque les longueurs des côtés de l'un sont **proportionnelles** aux longueurs des côtés de l'autre : on passe de chaque côté du premier au côté qui lui correspond dans le second en multipliant par **le même nombre** k. Les sommets et les côtés qui se correspondent sont dits **homologues**. Le nombre k est le **coefficient** d'agrandissement si $k > 1$, de réduction si $k < 1$.

$$\frac{DF}{AB} = \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$$



coefficient k = 1,5

DF = 1,5 × AB

DE = 1,5 × AC

EF = 1,5 × BC

mêmes marques : angles égaux

Même couleur : côtés homologues. Ici A correspond à D, mais B correspond à F : l'ordre alphabétique ne dit rien.

Deux triangles **égaux** (superposables, rappel de 4e) sont semblables, avec $k = 1$. Mais semblables ne veut pas dire égaux : même forme, pas forcément même taille. Et si DEF est un agrandissement de ABC de coefficient k, alors ABC est une réduction de DEF de coefficient $\frac{1}{k}$.

PROUVER AVEC LES LONGUEURS

1. **Ranger** les trois côtés de chaque triangle du plus petit au plus grand. Multiplier par un même nombre positif ne change pas l'ordre : le plus petit côté correspond au plus petit, le moyen au moyen, le plus grand au plus grand.
2. **Calculer les trois quotients** : chaque côté du second triangle divisé par son homologue du premier.
3. **Conclure.** Trois quotients égaux : les triangles sont semblables, et k est la valeur commune. Un seul quotient différent : ils ne le sont pas. Si un quotient n'est pas décimal, on compare des fractions ou des produits en croix, jamais des arrondis.

EXEMPLE

ABC a pour côtés $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm, et DEF a pour côtés $DF = 6$ cm, $DE = 7{,}5$ cm, $EF = 9$ cm. Ces triangles sont-ils semblables ?

1. Rangement : $AB < AC < BC$ et $DF < DE < EF$. Le plus petit avec le plus petit : $\frac{DF}{AB} = \frac{6}{4} = 1{,}5$
2. Les côtés moyens : $\frac{DE}{AC} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$
3. Les plus grands côtés : $\frac{EF}{BC} = \frac{9}{6} = 1{,}5$

les trois quotients valent 1,5 : ABC et DEF sont semblables, et DEF est un agrandissement de ABC de coefficient 1,5.

PIÈGE

Conclure « semblables » après avoir trouvé deux quotients égaux. — deux quotients ne disent rien du troisième côté. Les triangles de côtés 4, 5, 6 et 6, 8, 9 donnent deux quotients égaux à 1,5, et le troisième vaut 1,6.

Ce que ça coûte : la conclusion, et tous les calculs de longueurs qui s'appuient dessus.

Le réflexe : calculer **les trois** quotients, toujours, avant d'écrire la conclusion.

2 Reconnaître par les angles

PROPRIÉTÉ

Propriété caractéristique. Si deux triangles sont semblables, **alors** leurs angles sont égaux deux à deux : deux angles homologues ont la même mesure. **Réciproquement, si** deux triangles ont leurs angles égaux deux à deux, **alors** ils sont semblables.

RÈGLE

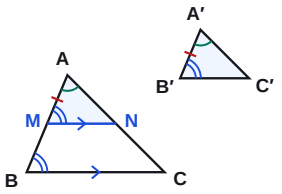
Deux paires d'angles égaux suffisent. La somme des angles d'un triangle vaut 180° (rappel de 5e) : si deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, les troisièmes angles sont égaux aussi.

EXEMPLE

Démonstration de la réciproque. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs angles égaux deux à deux, avec $A'B' < AB$ (sinon, on échange les deux triangles ; si $A'B' = AB$, le cas d'égalité ci-dessous conclut directement). Montrons que leurs côtés sont proportionnels.

1. On place M sur $[AB]$ tel que $AM = A'B'$. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.
2. Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont **correspondants**, formés par les parallèles (MN) et (BC) et la sécante (AB) : ils sont égaux (rappel de 5e). Donc $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
3. Les triangles AMN et $A'B'C'$ ont un côté de même longueur, $AM = A'B'$, compris entre deux angles égaux deux à deux : $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{AMN} = \widehat{A'B'C'}$. D'après un **cas d'égalité des triangles** (rappel de 4e), ils sont égaux : $AN = A'C'$ et $MN = B'C'$.
4. Comme (MN) est parallèle à (BC), le théorème de Thalès donne l'égalité des rapports, où l'on remplace AM, AN et MN :
   $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

les côtés de $A'B'C'$ sont proportionnels à ceux de ABC : les deux triangles sont semblables.



Le triangle AMN, découpé dans ABC, est égal à $A'B'C'$.

Le sens direct se démontre avec les mêmes outils : on place M et N avec $AM = A'B'$ et $AN = A'C'$; la réciproque de Thalès, puis le théorème de Thalès, donnent $MN = B'C'$, et le cas d'égalité « trois côtés » conclut.

PROUVER AVEC LES ANGLES

1. **Trouver deux paires d'angles égaux** : des mesures données ou calculées avec la somme 180°, un angle commun aux deux triangles, des angles opposés par le sommet, des angles droits, des angles alternes-internes ou correspondants formés par des parallèles.
2. **Écrire la correspondance** : les sommets de deux angles égaux sont homologues ; le troisième sommet correspond au troisième.
3. **Rédiger** : « Les triangles … ont deux angles égaux deux à deux, donc ils sont semblables. »

EXEMPLE

Dans le triangle RST, $\widehat{R} = 48^\circ$ et $\widehat{S} = 77^\circ$. Dans le triangle UVW, $\widehat{U} = 77^\circ$ et $\widehat{W} = 55^\circ$. Ces triangles sont-ils semblables ?

1. Le troisième angle de RST :
   $180 - 48 - 77 = 55$
   donc $\widehat{T} = 55^\circ$.
2. Ainsi $\widehat{S} = \widehat{U} = 77^\circ$ et $\widehat{T} = \widehat{W} = 55^\circ$: deux paires d'angles égaux. La correspondance est S et U, T et W, donc R et V.

RST et UVW sont semblables ; on vérifie que $\widehat{V} = 180^\circ - 77^\circ - 55^\circ = 48^\circ = \widehat{R}$.

PIÈGE

Conclure « semblables » avec une seule paire d'angles égaux, par exemple deux angles droits. — deux triangles rectangles n'ont pas forcément la même forme : un triangle rectangle isocèle (deux angles de 45°) et un triangle rectangle qui a un angle de 30° ne sont pas semblables.

Ce que ça coûte : la démonstration entière : la conclusion n'est pas justifiée.

Le réflexe : chercher une **deuxième** paire d'angles égaux — par exemple un angle commun.

3 Calculer des longueurs

CALCULER AVEC DEUX TRIANGLES SEMBLABLES

1. **Justifier** que les triangles sont semblables, par les angles ou par les longueurs.
2. **Écrire la correspondance des sommets**, puis les côtés homologues : un côté et son homologue sont **opposés à deux angles égaux**. Nommer le second triangle dans l'ordre de la correspondance aide : ABC et EFD si A, B, C correspondent à E, F, D.
3. **Calculer le coefficient** k avec une paire de côtés homologues connus, toujours dans le même sens : longueur du second triangle sur longueur du premier.
4. **Multiplier** les autres côtés du premier triangle par k. Garder k en fraction s'il n'est pas décimal, et contrôler : une réduction donne des longueurs plus petites.

ABC	AB = 6	BC = 8	AC = 9
EFD	EF = 4,5	FD = ?	ED = ?

× 0,75

Le tableau de proportionnalité des côtés homologues : une colonne par paire.

EXEMPLE

Les triangles ABC et EFD sont semblables, avec $\widehat{A} = \widehat{E}$ et $\widehat{B} = \widehat{F}$. On donne $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 9$ cm et $EF = 4{,}5$ cm. Calculer FD et ED.

1. A correspond à E et B à F, donc C à D. Les côtés homologues sont $[AB]$ et $[EF]$, $[BC]$ et $[FD]$, $[AC]$ et $[ED]$.
   $\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BC} = \frac{ED}{AC}$
2. Le coefficient :
   $k = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$
   $EF < AB$: c'est une réduction, et $k < 1$.
3. Les deux longueurs :
   $FD = 0{,}75 \times 8 = 6$
   et $ED = 0{,}75 \times 9 = 6{,}75$.

$\underline{FD = 6 \text{ cm et } ED = 6{,}75 \text{ cm.}}$

PIÈGE

Associer les côtés dans l'ordre des lettres de l'énoncé : avec « ABC et DEF », mettre $[BC]$ en face de $[EF]$. — le nom des triangles ne dit pas la correspondance, seuls les angles égaux la disent. Avec $\widehat{A} = \widehat{E}$ et $\widehat{B} = \widehat{F}$, $[BC]$ est opposé à $\widehat{A}$, donc son homologue est le côté opposé à $\widehat{E}$: $[FD]$.

Ce que ça coûte : toutes les longueurs calculées, même si chaque multiplication est juste.

Le réflexe : écrire la correspondance des sommets **avant** tout calcul, puis remplir le tableau colonne par colonne.

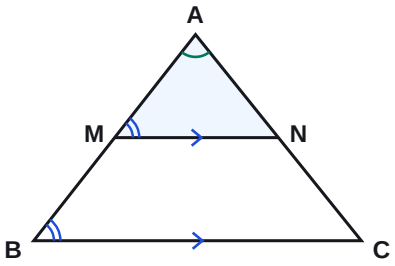
4 Thalès, homothétie, aires

PROPRIÉTÉ

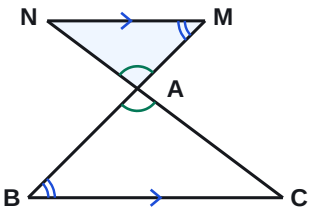
Configuration de Thalès. Si M est sur la droite (AB), N sur la droite (AC) et (MN) parallèle à (BC), les triangles AMN et ABC sont semblables : l'angle en A est commun (ou opposé par le sommet, en papillon) et $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ (angles correspondants, ou alternes-internes). Les rapports égaux du théorème de Thalès sont les quotients de leurs côtés homologues : voir la fiche « Théorème de Thalès ».

PROPRIÉTÉ

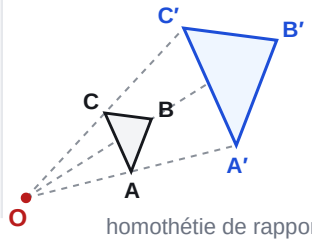
Homothétie. L'image d'un triangle par une homothétie de rapport k est un triangle semblable : les angles sont conservés, et les longueurs sont multipliées par k si $k > 0$, par $-k$ si $k < 0$. L'inverse est faux : deux triangles semblables ne se déduisent pas toujours l'un de l'autre par une seule homothétie ; il faut parfois enchaîner avec une translation, une rotation ou une symétrie (voir la fiche « Transformations du plan »).



triangles emboîtés



papillon



homothétie de rapport 2

Trois sources de triangles semblables : les deux configurations de Thalès et l'homothétie.

RÈGLE

Pour deux triangles semblables de coefficient k, les **longueurs** et les **périmètres** sont multipliés par k, les **aires** par k^2 : la base et la hauteur sont toutes deux multipliées par k.

EXEMPLE

ABC est rectangle en A, avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm. Le triangle DEF lui est semblable, et l'homologue de $[BC]$ mesure 15 cm. Quelle est l'aire de DEF ?

1. D'après le théorème de Pythagore :
   $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
   donc $BC = 5$ cm.
2. Le coefficient :
   $k = \frac{15}{5} = 3$
3. L'aire de ABC est $3 \times 4 \div 2 = 6$ cm², multipliée par k^2 :
   $6 \times 3^2 = 54$
4. Contrôle : DEF est rectangle aussi (angles conservés), de côtés de l'angle droit $3 \times 3 = 9$ cm et $3 \times 4 = 12$ cm.
   $9 \times 12 \div 2 = 54$

l'aire de DEF est 54 cm², neuf fois celle de ABC.

PIÈGE

Multiplier l'aire par k : $6 \times 3 = 18$ cm². — le coefficient porte sur les longueurs. L'aire dépend de deux longueurs, et chacune est multipliée par k.

Ce que ça coûte : le résultat, et toute question qui s'en sert.

Le réflexe : k pour les longueurs, k^2 pour les aires ; en cas de doute, recalculer l'aire avec les longueurs agrandies.

À VÉRIFIER

- Ai-je justifié « semblables » par **trois** quotients égaux, ou par **deux** paires d'angles égaux ?
- Mes angles égaux viennent-ils de l'énoncé, d'un calcul ou d'une propriété (parallèles, angle commun), et non du dessin ?
- Ai-je écrit la **correspondance des sommets** avant de former les quotients ?
- Chaque côté est-il en face de son homologue — opposé à l'angle égal ?
- Mon coefficient est-il dans le bon sens, et gardé en fraction s'il n'est pas décimal ?
- Pour une aire, ai-je multiplié par k^2, et non par k ?

À RETENIR

- Deux triangles sont **semblables** quand leurs côtés sont **proportionnels** : chaque côté de l'un vaut k fois son homologue dans l'autre.
- **Propriété caractéristique** : ils sont semblables exactement quand leurs **angles sont égaux deux à deux** ; deux paires d'angles égaux suffisent.
- Par les longueurs, il faut **trois** quotients égaux ; deux ne prouvent rien.
- Les côtés homologues sont **opposés aux angles égaux** : la correspondance des sommets s'écrit avant le premier calcul.
- Les configurations de **Thalès** et l'**homothétie** fabriquent des triangles semblables.
- Longueurs et périmètres × k, aires × k^2.