

Calcul littéral — Développement et factorisation

4^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Développer et factoriser sont **deux chemins opposés** entre les deux écritures d'une même expression. Développer sert à comparer et à calculer ; factoriser sert à résoudre. Toute la difficulté du chapitre tient en une question : de quel côté ai-je besoin d'aller ?

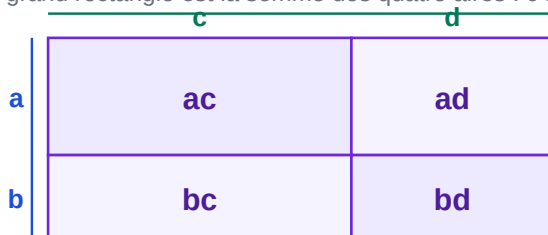
1 La double distributivité

RÈGLE

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde. Quatre produits, toujours quatre, même quand deux se ressemblent.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

l'aire du grand rectangle est la somme des quatre aires : c'est toute la règle



côtés **(a+b)** et **(c+d)**

aire totale = $ac + ad + bc + bd$

aucun des quatre ne s'oublie :
il n'y a pas trois cases sur ce dessin

le dessin ne vaut que pour des longueurs positives — la règle, elle, vaut toujours

Le découpage d'un rectangle donne les quatre produits, et rappelle qu'aucun ne se perd.

DÉVELOPPER SANS EN OUBLIER

- ① Écrire les quatre produits **avant** de calculer quoi que ce soit.
l'erreur naît presque toujours d'un calcul mené en même temps que la distribution.
- ② Traiter les signes ensuite, terme par terme, en gardant les parenthèses des nombres négatifs.
- ③ Réduire en dernier : regrouper les termes en x^2 , puis en x , puis les constantes.

EXEMPLE

Développer $(2x - 3)(x + 5)$.

- ① Les quatre produits :
 $2x \times x + 2x \times 5 + (-3) \times x + (-3) \times 5$
- ② On calcule chacun :
 $2x^2 + 10x - 3x - 15$
- ③ On réduit les termes en x :
 $10 - 3 = 7$

$2x^2 + 7x - 15$

2 Les trois identités remarquables

RÈGLE

Ce sont des développements si fréquents qu'on les reconnaît au lieu de les refaire. Le **double produit** $2ab$ est le terme qu'on oublie.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $(x + 3)^2 = x^2 + 9$. — un carré n'est pas une distribution sur chaque terme. $(x + 3)^2$ vaut $(x + 3)(x + 3)$, ce qui donne quatre produits et fait apparaître le double produit $6x$.

Le réflexe : vérifier avec un nombre. Pour $x = 1$: $(1 + 3)^2 = 16$, tandis que $1 + 9 = 10$. L'écart se voit en trois secondes.

La troisième identité est la seule qui **fait disparaître** le terme en x : les doubles produits s'annulent. C'est ce qui la rend si utile en factorisation, et c'est aussi ce qui permet des calculs mentaux : $101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 10\,000 - 1 = 9\,999$.

3 Factoriser : reconnaître ce qui se répète

avant de factoriser, une seule question : qu'est-ce qui se répète ?

un facteur commun apparaît

$$5x^2 + 15x$$

$5x$ est dans les deux termes

$$= 5x(x + 3)$$

une identité se reconnaît

$$x^2 - 49$$

deux carrés séparés par un moins

$$= (x + 7)(x - 7)$$

une somme de deux carrés, elle, ne se factorise pas

Deux voies seulement en 4ème : un facteur commun, ou une identité remarquable.

CHOISIR LA BONNE VOIE

- ① Compter les termes. **Deux termes** : chercher un facteur commun, puis une différence de carrés.
- ② **Trois termes** : chercher $a^2 \pm 2ab + b^2$ — vérifier que le terme du milieu est bien le double produit.
sans cette vérification, on force une identité qui n'existe pas.
- ③ Développer le résultat pour contrôler. Une factorisation se vérifie toujours, et en quinze secondes.

EXEMPLE

Factoriser $(x + 2)(x - 4) + (x + 2)(3x + 1)$.

- ① Le facteur commun n'est pas un nombre mais une **parenthèse entière** : $(x + 2)$.
- ② On la met en facteur :
 $(x + 2)[(x - 4) + (3x + 1)]$
- ③ On réduit le crochet :
 $1 + 3 = 4$

$$(x+2)(4x - 3)$$

Une expression factorisée **s'annule facilement** : un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est. C'est toute la raison d'être de la factorisation, et ce sera l'outil des équations de 3ème.

RÉSoudre UNE ÉQUATION-PRODUIT

- ① **Tout ramener à zéro** d'un côté du signe égal. Une équation-produit ne se lit que sous la forme « quelque chose = 0 ».
- ② **Factoriser** le membre non nul : facteur commun d'abord, identité remarquable ensuite.
- ③ **Scinder** : un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. Chaque facteur donne une équation du premier degré.
c'est la seule propriété qui autorise le passage ; elle n'a pas d'équivalent pour une somme.
- ④ **Résoudre chacune**, et donner toutes les solutions — il y en a généralement autant que de facteurs.

EXEMPLE

C'est à cela que sert la factorisation : la **résolution d'équations** que le développement rendrait insolubles. Résoudre $x^2 - 9 = 0$.

- ① Sous cette forme, aucun moyen d'isoler x : il apparaît au carré. On reconnaît la troisième identité remarquable.
 $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
- ② Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. L'équation se scinde donc en deux équations du premier degré : $x - 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$.
- ③ Chacune se résout d'un geste.
 $x = 3$
ou $x = -3$.

deux solutions, 3 et -3 — que la forme développée ne laissait pas voir

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Résoudre $(x - 2)(x + 5) = 12$ en écrivant $x - 2 = 12$ ou $x + 5 = 12$. — la propriété du produit nul ne vaut que pour **zéro**. Deux nombres dont le produit vaut 12 peuvent valoir 3 et 4, ou 24 et 0,5 : le produit ne dit rien sur chacun. Avec zéro, au contraire, l'un des deux est nécessairement nul.

Le réflexe : avant de scinder, vérifier qu'il y a bien un 0 de l'autre côté. Sinon : développer, tout ramener à zéro, puis factoriser à nouveau.

EXEMPLE

Factoriser $9x^2 - 25 + (3x - 5)(x + 1)$.

① Le premier morceau est une différence de deux carrés : $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$.
 $9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$

② L'expression devient une somme de deux produits, qui partagent le facteur $(3x - 5)$.

③ On met ce facteur commun en évidence.
 $(3x - 5)[(3x + 5) + (x + 1)]$

④ On réduit le crochet.
 $(3x + 5) + (x + 1) = 4x + 6$
la forme factorisée est $(3x - 5)(4x + 6)$.

$(3x - 5)(4x + 6)$ — une identité d'abord, un facteur commun ensuite

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit les quatre produits avant de calculer ?
- Le double produit $2ab$ est-il présent dans mon carré ?
- Ai-je vérifié ma factorisation en la redéveloppant ?
- Ai-je testé avec une valeur simple, $x = 1$ ou $x = 2$?

À RETENIR

- $(a + b)(c + d)$ donne **quatre** produits, jamais trois.
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — le **double produit** est le terme qu'on oublie.
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$: c'est la seule identité qui efface le terme en x .
- Une **somme** de deux carrés ne se factorise pas.
- Un facteur commun peut être une parenthèse entière, pas seulement un nombre.
- Une factorisation se vérifie en la redéveloppant — quinze secondes bien placées.