COURS

4e

Cosinus d'un angle — Triangle rectangle

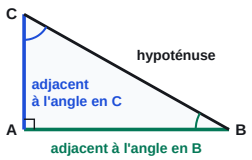
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Le théorème de Pythagore relie les trois longueurs d'un triangle rectangle, mais il ne dit rien de ses angles aigus. Le cosinus fait le lien : **dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse, et il ne dépend que de la mesure de l'angle.** Avec la calculatrice, il donne un angle à partir de deux longueurs, ou une longueur à partir d'un angle.

1 Hypoténuse et côté adjacent

DÉFINITION

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit ; c'est le plus long des trois côtés (rappel du chapitre sur le théorème de Pythagore). Choisissons l'un des deux **angles aigus** : ses deux côtés sont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit. Ce côté de l'angle droit est le **côté adjacent** à l'angle choisi.



En vert, le côté adjacent à l'angle en B ; en bleu, celui de l'angle en C. L'hypoténuse $[BC]$ ne change pas.

NOMMER LES CÔTÉS EN TROIS GESTES

1. **Repérer l'angle droit**, par le codage ou par l'énoncé. Le côté qui lui fait face est l'**hypoténuse** : on la nomme en premier.
2. **Marquer d'un arc l'angle aigu** dont on parle. C'est lui qui décide du reste : changer d'angle change le côté adjacent.
3. Parmi les deux côtés de cet angle, celui qui **n'est pas l'hypoténuse** est le **côté adjacent**.

EXEMPLE

Le triangle DEF est rectangle en E. Nommer l'hypoténuse, puis le côté adjacent à l'angle $\widehat{EDF}$ et le côté adjacent à l'angle $\widehat{EFD}$.

1. L'angle droit est en E : le côté qui lui fait face, $[DF]$, est l'hypoténuse.
2. Les côtés de l'angle $\widehat{EDF}$ sont $[DE]$ et l'hypoténuse : le côté adjacent est $[DE]$. De même, pour $\widehat{EFD}$, c'est $[EF]$.

hypoténuse $[DF]$; côté adjacent à $\widehat{EDF}$: $[DE]$; côté adjacent à $\widehat{EFD}$: $[EF]$

PIÈGE

Prendre l'hypoténuse pour le côté adjacent, « puisqu'elle touche l'angle ». — l'hypoténuse touche bien les deux angles aigus, mais elle a déjà un nom. Le côté adjacent est **l'autre** côté de l'angle choisi, celui qui forme aussi l'angle droit.

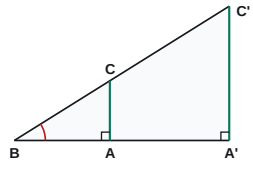
Ce que ça coûte : toute la question : un quotient écrit avec les mauvais côtés donne un cosinus faux, parfois même supérieur à 1.

Le réflexe : nommer l'hypoténuse d'abord, en face de l'angle droit ; le côté adjacent est le côté de l'angle qui reste.

2 Un quotient qui ne dépend que de l'angle

PROPRIÉTÉ

Propriété, démontrée ci-dessous avec le théorème de Thalès. Si deux triangles rectangles ont un angle aigu de même mesure, alors le quotient $\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ de cet angle est le même dans les deux triangles. Il ne dépend pas de la taille du triangle, seulement de la mesure de l'angle.



Même angle en B : (AC) et $(A'C')$ sont perpendiculaires à (BA'), donc parallèles.

EXEMPLE

Démontrer la propriété. ABC est rectangle en A, $A'B'C'$ est rectangle en A', et leurs angles en B et en B' ont la même mesure. On pose le second sur le premier, angle sur angle : B' en B, A' sur $[BA)$, C' sur $[BC)$.

1. Les droites (AC) et $(A'C')$ sont toutes deux perpendiculaires à la droite (BA').
   si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles : $(AC) \parallel (A'C')$.
2. Les points B, A, A' sont alignés, ainsi que B, C, C', et $(AC) \parallel (A'C')$. D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$.
3. L'égalité des produits en croix donne $BA \times BC' = BA' \times BC$. En divisant les deux membres par $BC \times BC'$, on obtient $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BA'}{BC'}$.
   à gauche, le côté adjacent à l'angle en B sur l'hypoténuse dans ABC ; à droite, le même quotient dans $A'BC'$.

le quotient côté adjacent sur hypoténuse est le même dans les deux triangles : il ne dépend que de l'angle

DÉFINITION

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient de la longueur du **côté adjacent** à cet angle par la longueur de l'**hypoténuse**. Grâce à la propriété précédente, il ne dépend que de la mesure de l'angle : on peut écrire $\cos(60^\circ)$ sans préciser de triangle. Pour ABC rectangle en A :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

PROPRIÉTÉ

Conséquence de la définition. Le cosinus d'un angle aigu est **strictement compris entre 0 et 1** : c'est le quotient de deux longueurs, et le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse. Un cosinus supérieur à 1 signale une erreur, jamais un résultat.

ÉCRIRE LE COSINUS D'UN ANGLE

1. **Vérifier que le triangle est rectangle** : par le codage, par l'énoncé, ou en le démontrant avec la réciproque de Pythagore. Sans angle droit, pas de cosinus.
2. **Écrire la fraction** : au dénominateur l'hypoténuse, au numérateur le côté adjacent à l'angle choisi.
3. **Remplacer** par les longueurs, dans la même unité, puis donner la valeur exacte ou une valeur approchée.

EXEMPLE

Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 12$ cm, $ST = 5$ cm et $RT = 13$ cm. Calculer le cosinus de chacun de ses angles aigus.

1. L'angle droit est en S : l'hypoténuse est $[RT]$. Le côté adjacent à $\widehat{SRT}$ est $[RS]$.
   $\cos(\widehat{SRT}) = \frac{RS}{RT} = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$
2. Le côté adjacent à $\widehat{RTS}$ est $[ST]$; le dénominateur, lui, ne change pas.
   $\cos(\widehat{RTS}) = \frac{ST}{RT} = \frac{5}{13} \approx 0{,}385$
3. Contrôle : les deux valeurs sont comprises entre 0 et 1.

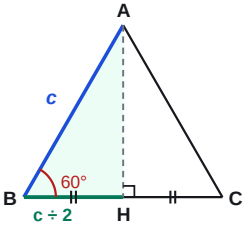
$\cos(\widehat{SRT}) = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$ **et** $\cos(\widehat{RTS}) = \frac{5}{13} \approx 0{,}385$

EXEMPLE

Démontrer que $\cos(60^\circ) = 0{,}5$. On trace un triangle équilatéral ABC de côté c et le milieu H de $[BC]$.

1. $AB = AC$, donc A est sur la médiatrice de $[BC]$. Cette médiatrice passe par le milieu H et elle est perpendiculaire à (BC) : le triangle ABH est rectangle en H.
   rappel : un point équidistant des extrémités d'un segment est sur sa médiatrice.
2. Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux et leur somme vaut 180° : $\widehat{ABH} = 60^\circ$.
3. Dans ABH, l'hypoténuse est $[AB]$, de longueur c, et le côté adjacent à l'angle en B est $[BH]$, de longueur $\dfrac{c}{2}$. Le quotient vaut donc $\dfrac{c}{2} \div c = \dfrac{1}{2}$.
   le résultat ne dépend pas de c : c'est la propriété démontrée plus haut, vérifiée sur un cas.

$\cos(60^\circ) = 0{,}5$**, pour tout triangle rectangle qui a un angle de 60°**



Dans le triangle équilatéral, la hauteur $[AH]$ coupe $[BC]$ en son milieu.

On le constate à la calculatrice comme sur la figure ci-contre : **plus un angle aigu est grand, plus son cosinus est petit.** $\cos(20^\circ) \approx 0{,}94$, $\cos(45^\circ) \approx 0{,}71$, $\cos(70^\circ) \approx 0{,}34$: avec la même hypoténuse, le côté adjacent raccourcit quand l'angle s'ouvre. Un angle

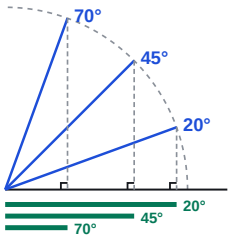
proche de 90° a un cosinus proche de 0.

PIÈGE

Croire que le cosinus d'un angle change quand on agrandit le triangle. — agrandir le triangle multiplie le côté adjacent et l'hypoténuse par le même nombre : leur quotient ne bouge pas. C'est exactement ce que démontre le théorème de Thalès.

Ce que ça coûte : la justification d'une question « vrai ou faux », et le raisonnement de tout exercice où deux triangles partagent un angle.

Le réflexe : un cosinus ne dépend que de l'angle. Deux triangles rectangles de tailles différentes, avec un angle de même mesure, ont le même cosinus pour cet angle.



Même hypoténuse, trois angles : en vert, les côtés adjacents.

3 Calculer la mesure d'un angle

DE DEUX LONGUEURS VERS L'ANGLE

1. **Vérifier le mode degrés** de la calculatrice (D ou DEG à l'écran). Le test : $\cos(60^\circ)$ doit afficher 0,5, la valeur démontrée plus haut ; en mode radians, la machine affiche environ −0,95, sans avertir.
2. **Écrire le cosinus** de l'angle cherché avec les deux longueurs connues : le côté adjacent et l'hypoténuse.
3. **Appliquer la touche inverse** du cosinus, notée `cos⁻¹`, `Arccos` ou `acos` selon les modèles, souvent en seconde fonction. Elle donne l'angle aigu dont le cosinus est ce quotient ; rien à voir avec $1 \div \cos$.
4. **Arrondir à la fin seulement**, comme le demande l'énoncé, et contrôler : la mesure est comprise entre 0° et 90°.

EXEMPLE

Dans le triangle RST rectangle en S de l'exemple précédent ($RS = 12$ cm, $RT = 13$ cm), mesurer l'angle $\widehat{SRT}$ au degré près.

1. $\cos(\widehat{SRT}) = \dfrac{12}{13}$. On tape la fraction telle quelle, puis la touche `cos⁻¹` : la calculatrice affiche $\widehat{SRT} \approx 22{,}62^\circ$.
2. Contrôle : de même, $\widehat{RTS} \approx 67{,}38^\circ$, et les deux angles aigus d'un triangle rectangle ont une somme de 90°. $22{,}62 + 67{,}38 = 90$

$\widehat{SRT} \approx 23^\circ$ **au degré près**

PIÈGE

Arrondir le quotient avant d'appliquer la touche cos⁻¹. — $\dfrac{12}{13}$ arrondi à 0,9 donne un angle d'environ 25,8°, soit 26° au lieu de 23°. Près de 0° surtout, le cosinus varie lentement : un petit arrondi sur le quotient devient un gros écart sur l'angle.

Ce que ça coûte : le résultat de la question, alors que la démarche est juste.

Le réflexe : taper la fraction elle-même, ou garder toutes les décimales affichées, et n'arrondir que l'angle, à la dernière ligne.

4 Calculer une longueur

RÈGLE

Pour ABC rectangle en A, $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$. Connaissant l'angle et l'une des deux longueurs, l'égalité des produits en croix donne l'autre : on **multiplie** pour le côté adjacent, $AB = BC \times \cos(\widehat{ABC})$; on **divise** pour l'hypoténuse, $BC = AB \div \cos(\widehat{ABC})$.

TROUVER LE CÔTÉ ADJACENT OU L'HYPOTÉNUSE

1. **Écrire l'égalité du cosinus** pour l'angle donné, puis **remplacer** ce qui est connu : par exemple $\cos(32^\circ) = \dfrac{AB}{9}$.
2. **Repérer la place de l'inconnue.** En haut de la fraction, on multiplie par le dénominateur ; en bas, on divise le numérateur par le cosinus.
3. **Calculer d'un seul trait** à la calculatrice, en mode degrés, n'arrondir qu'à la fin, puis **contrôler** : l'hypoténuse doit être plus longue que le côté adjacent.

EXEMPLE

Deux calculs, au millimètre. **a.** ABC est rectangle en A, avec $\widehat{ABC} = 32^\circ$ et $BC = 9$ cm : calculer AB. **b.** DEF est rectangle en D, avec $\widehat{DEF} = 50^\circ$ et $DE = 7$ cm : calculer l'hypoténuse EF.

① a. Vu de B, $[AB]$ est le côté adjacent et $[BC]$ l'hypoténuse : $\cos(32^\circ) = \dfrac{AB}{9}$. L'inconnue est en haut : on multiplie.

$AB = 9 \times \cos(32^\circ) \approx 7{,}6$

contrôle : $7{,}6 < 9$, le côté adjacent est plus court que l'hypoténuse.

② b. Vu de E, $[DE]$ est le côté adjacent : $\cos(50^\circ) = \dfrac{7}{EF}$, donc $EF \times \cos(50^\circ) = 7$. L'inconnue est en bas : on divise.

$EF = \frac{7}{\cos(50^\circ)} \approx 10{,}9$

contrôle : $10{,}9 > 7$, l'hypoténuse est bien le plus long côté.

$AB \approx 7{,}6$ cm et $EF \approx 10{,}9$ cm

PIÈGE

Multiplier quand l'inconnue est au dénominateur : écrire $EF = 7 \times \cos(50^\circ) \approx 4{,}5$ cm. — le nombre ressemble à une longueur, mais il est plus petit que $DE = 7$ cm : impossible pour une hypoténuse.

Ce que ça coûte : la question entière, et souvent la suivante, qui réutilise la longueur fausse.

Le réflexe : regarder où est l'inconnue dans la fraction avant de calculer, puis vérifier que l'hypoténuse est le plus grand côté.

5 Pythagore ou cosinus ?

CHOISIR L'OUTIL

① **Que des longueurs**, deux connues et la troisième cherchée : **théorème de Pythagore**.
② **Un angle aigu en jeu**, donné ou cherché, avec le côté adjacent et l'hypoténuse : **cosinus**.
③ **Un angle donné, le troisième côté cherché** : le cosinus ne le contient pas. Le cosinus d'abord, puis Pythagore.

EXEMPLE

La charpente d'un toit est un triangle PQS isocèle en S, avec $PQ = 9$ m et $SP = SQ = 5{,}2$ m. Quel angle chaque pan du toit fait-il avec l'horizontale (PQ), au degré près ? Quelle est la hauteur du toit, au décimètre près ?

① $SP = SQ$, donc S est sur la médiatrice de $[PQ]$, qui passe par le milieu H de $[PQ]$ et lui est perpendiculaire : PHS est rectangle en H, et $PH = 9 \div 2 = 4{,}5$ m.

② Dans PHS, $[PH]$ est le côté adjacent à l'angle en P et $[PS]$ l'hypoténuse.

$\cos(\widehat{SPH}) = \frac{4{,}5}{5{,}2} \approx 0{,}865$

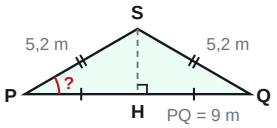
la touche `cos⁻¹` donne $\widehat{SPH} \approx 30{,}07^\circ$.

③ La hauteur est le troisième côté : théorème de Pythagore dans PHS.

$SH^2 = 5{,}2^2 - 4{,}5^2 = 27{,}04 - 20{,}25 = 6{,}79$

$SH = \sqrt{6{,}79} \approx 2{,}6$ m.

chaque pan fait environ 30° avec l'horizontale, et le toit mesure environ 2,6 m de haut



La hauteur $[SH]$ tombe au milieu de $[PQ]$.

À VÉRIFIER

- Angle droit codé ou démontré ? **Hypoténuse au dénominateur**, côté adjacent **à l'angle choisi** au numérateur ?
- Pour un angle : calculatrice en **degrés**, touche **cos⁻¹**, mesure entre 0° et 90° ?
- Pour une longueur : ai-je multiplié si l'inconnue est en haut, divisé si elle est en bas ? L'hypoténuse est-elle le plus grand côté ?
- Ai-je arrondi **une seule fois**, à la fin, et conclu par une phrase avec l'unité ?

À RETENIR

- **Hypoténuse d'abord**, en face de l'angle droit ; le **côté adjacent** est l'autre côté de l'angle choisi, et il change avec l'angle.
- Cosinus = **côté adjacent ÷ hypoténuse** : ce quotient ne dépend que de la mesure de l'angle, grâce au théorème de Thalès.
- Un cosinus est **toujours compris entre 0 et 1**, et il diminue quand l'angle augmente ; $\cos(60^\circ) = 0{,}5$.
- Pour un angle : le quotient, puis la touche **cos⁻¹**, calculatrice en **degrés**, arrondi à la fin.
- Pour une longueur : inconnue en haut, on **multiplie** ; inconnue en bas, on **divise**. L'hypoténuse reste le plus grand côté.