CORRIGÉ

4e

Corrigé détaillé
8 exercices

Nombres premiers — Divisibilité et décomposition

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Vrai ou faux ? Justifie.

1. a. **Faux.** 1 n'a qu'un seul diviseur, lui-même ; un nombre premier en a exactement deux.
2. b. **Vrai.** $2 + 4 + 5 + 7 = 18$, divisible par 9 :
   $2\,457 = 9 \times 273$
3. c. **Faux.**
   $91 = 7 \times 13$
4. d. **Faux.** 9 est impair, et $9 = 3 \times 3$: il a trois diviseurs, 1, 3 et 9.
5. e. **Vrai.** Si $n = 9 \times k$, alors $n = 3 \times (3 \times k)$: n est un multiple de 3.
6. f. **Vrai.** Le reste 2 est bien inférieur à 7 :
   $100 = 7 \times 14 + 2$

2 Critères de divisibilité et division euclidienne

1. a. 1 230 se termine par 0 : divisible par 2, par 5 et par 10. $1 + 2 + 3 + 0 = 6$: divisible par 3, pas par 9.
2. b. 4 515 se termine par 5 : divisible par 5, ni par 2 ni par 10. $4 + 5 + 1 + 5 = 15$: divisible par 3, pas par 9.
3. c. 7 236 se termine par 6 : divisible par 2, ni par 5 ni par 10. $7 + 2 + 3 + 6 = 18$: divisible par 3 et par 9.
4. d. 3 105 se termine par 5 : divisible par 5, ni par 2 ni par 10. $3 + 1 + 0 + 5 = 9$: divisible par 3 et par 9.
5. e. Le reste vaut 6, qui est inférieur à 9 et non nul :
   $4\,515 = 9 \times 501 + 6$
   4 515 n'est donc pas divisible par 9, comme annoncé au b.

3 À la recherche des nombres premiers

1. a. On écarte les nombres pairs, ceux qui se terminent par 5, puis ceux dont la somme des chiffres est divisible par 3 (81, 87, 93, 99). Il reste 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91 et 97.
2. Le test par 7 écarte $77 = 7 \times 11$ et $91 = 7 \times 13$; les six autres ne sont pas divisibles par 7.
3. Ces six nombres sont inférieurs à 121 et ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 : ils sont premiers. Ce sont 71, 73, 79, 83, 89 et 97.
4. b. 119 n'est pas premier :
   $119 = 7 \times 17$
5. 113 est impair, $1 + 1 + 3 = 5$, il ne se termine ni par 0 ni par 5, et le test par 7 laisse un reste :
   $113 = 7 \times 16 + 1$
   113 est inférieur à 121 : il est premier.
6. c. De deux entiers qui se suivent, l'un est pair. S'il est plus grand que 2, il est divisible par 2 et n'est pas premier. Le nombre pair est donc 2 lui-même, et son voisin est 1, qui n'est pas premier, ou 3.
7. Inès a raison : 2 et 3 sont les seuls nombres premiers qui se suivent.

4 Décomposer en produit de facteurs premiers

1. a. Escalier : 252, 126, 63, 21, 7, 1, en divisant par 2, 2, 3, 3 et 7.
   $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
2. b. Escalier : 600, 300, 150, 75, 25, 5, 1, en divisant par 2, 2, 2, 3, 5 et 5.
   $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$
3. c. 1 155 est impair et $1 + 1 + 5 + 5 = 12$: on divise par 3, puis par 5, puis par 7. Escalier : 1 155, 385, 77, 11, 1.
   $1\,155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$
4. d. $2\,520 = 252 \times 10$ et $10 = 2 \times 5$: on ajoute un 2 et un 5 aux facteurs de 252.
   $2\,520 = 252 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
5. Contrôle : chaque produit, recalculé, redonne bien le nombre de départ.

5 Simplifier et comparer des fractions, sans calculatrice

1. a. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$; on barre un 2, un 3 et le 7.
   $\frac{84}{126} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2}{3}$
2. b. $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ et $495 = 3^2 \times 5 \times 11$; on barre deux 3 et le 5.
   $\frac{270}{495} = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{3^2 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 3}{11} = \frac{6}{11}$
3. c. On décompose chaque fraction :
   $\frac{33}{77} = \frac{3 \times 11}{7 \times 11} = \frac{3}{7}$
4. De même :
   $\frac{39}{91} = \frac{3 \times 13}{7 \times 13} = \frac{3}{7}$
5. Avec 17, un nombre premier moins connu :
   $\frac{51}{119} = \frac{3 \times 17}{7 \times 17} = \frac{3}{7}$
6. Enfin :
   $\frac{57}{135} = \frac{3 \times 19}{3^3 \times 5} = \frac{19}{45}$
7. Et $\frac{19}{45}$ n'est pas égale à $\frac{3}{7}$: les produits en croix diffèrent.
   $19 \times 7 = 133 \neq 135 = 45 \times 3$
8. Conclusion : $\frac{33}{77}$, $\frac{39}{91}$ et $\frac{51}{119}$ sont égales, à $\frac{3}{7}$; $\frac{57}{135}$ ne l'est pas.
9. d. $84 = 7 \times 12$: on multiplie les deux termes par 12.
   $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 12}{7 \times 12} = \frac{36}{84}$

6 Repérer l'erreur, puis corriger

1. a. Léo s'est arrêté trop tôt : 45 n'est pas premier, $45 = 3^2 \times 5$.
   $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
2. b. Mia a oublié le test par 3 : $8 + 7 = 15$ est divisible par 3.
   $87 = 3 \times 29$
   87 n'est donc pas premier.
3. c. Sam a oublié 36 lui-même. Les paires sont 1×36, 2×18, 3×12, 4×9 et 6×6 : les diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.
4. d. Zoé a barré dans une somme : le 2 n'est pas un facteur de tout le numérateur. On calcule d'abord le numérateur :
   $\frac{2 \times 3 + 5}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$
5. 11 est premier et $14 = 2 \times 7$: il n'y a rien à simplifier, la fraction vaut $\frac{11}{14}$, et non $\frac{8}{7}$.

7 Les lots de la kermesse

1. a. 5 lots sont impossibles : 96 ne se termine ni par 0 ni par 5, il resterait une gourde.
   $96 = 5 \times 19 + 1$
2. 8 lots sont possibles : 8 divise les deux nombres, avec $120 = 8 \times 15$.
   $96 = 8 \times 12$
   chaque lot aurait 12 gourdes et 15 casquettes.
3. b. Escalier de 96 : on divise cinq fois par 2, puis par 3.
   $96 = 2^5 \times 3$
4. Escalier de 120 : trois fois par 2, puis par 3 et par 5.
   $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
5. c. Un nombre de lots divise 96 et 120 : il ne contient que des facteurs communs, au plus 2^3 et 3. Ce sont les diviseurs de :
   $2^3 \times 3 = 24$
6. Les nombres de lots possibles sont 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.
7. d. Le plus grand est 24 :
   $96 \div 24 = 4$
   et $120 \div 24 = 5$.
8. L'association peut faire au plus 24 lots, chacun de 4 gourdes et 5 casquettes.

8 Sommes d'entiers consécutifs

1. a. Les deux sommes :
$12 + 13 + 14 = 39 = 3 \times 13$
2. Et :
$30 + 31 + 32 = 93 = 3 \times 31$
les deux sommes sont des multiples de 3, et même le triple du nombre du milieu.
3. b. Les trois entiers sont n, $n + 1$ et $n + 2$. On réduit la somme, puis on factorise :
$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \times (n + 1)$
4. Comme $n + 1$ est un entier, la somme est un multiple de 3, quel que soit n.
5. c. Non. Un contre-exemple suffit :
$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 \times 2 + 2$
le reste n'est pas nul, 10 n'est pas un multiple de 4.
6. d. Oui. Avec n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ et $n + 4$:
$5n + 10 = 5 \times (n + 2)$
7. La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3, celle de cinq un multiple de 5, mais celle de quatre pas toujours un multiple de 4.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Utiliser les critères de divisibilité et écrire une division euclidienne	1 pt	Juger la divisibilité par 3 sur le dernier chiffre ; donner un reste supérieur ou égal au diviseur
Reconnaître un nombre premier en testant 2, 3, 5 et 7	1 pt	Déclarer 1 premier, ou 51, 87, 91 sans les quatre tests
Décomposer en produit de facteurs premiers et vérifier le produit	2 pts	Laisser un facteur non premier comme 45 ; oublier un facteur en recopiant l'escalier ; écrire 1 dans le produit
Simplifier une fraction et reconnaître des fractions égales	2 pts	Barrer dans une somme ; effacer tout un 2^2 contre un seul 2 ; s'arrêter avant la fin
Modéliser un partage par les diviseurs communs et conclure par une phrase	2 pts	Ne tester qu'une des deux quantités ; donner le nombre de parts quand on demande leur composition
Démontrer une propriété générale avec une lettre, ou réfuter par un contre-exemple	2 pts	Conclure sur deux ou trois exemples ; oublier de factoriser pour faire apparaître le multiple