COURS

4e

Nombres premiers — Divisibilité et décomposition

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

En 5e, on a rencontré les nombres premiers jusqu'à 30. En 4e, on dresse leur liste jusqu'à 100 et on s'en sert comme de briques : **tout nombre entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers, et d'une seule façon à l'ordre près.** Cette décomposition révèle les diviseurs d'un nombre et permet de simplifier une fraction sans tâtonner.

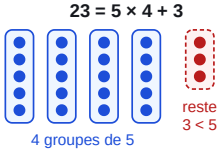
1 Multiples, diviseurs, critères (rappels)

DÉFINITION

Soit a et b deux entiers, b non nul. a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$. On dit aussi que b est un **diviseur** de a, que b **divise** a, ou que a est **divisible** par b. Ainsi $84 = 7 \times 12$: 84 est un multiple de 7 ; 7 et 12 sont des diviseurs de 84.

DÉFINITION

Diviser l'entier a par l'entier b non nul, c'est trouver le **quotient** q et le **reste** r, entiers, tels que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$. b **divise** a **si, et seulement si, ce reste est nul** ; à la calculatrice, le quotient $a \div b$ est alors un nombre entier. Par exemple, $401 = 17 \times 23 + 10$: 17 ne divise pas 401.



23 jetons par groupes de 5 : 4 groupes, reste 3. Comme $3 < 5$, on ne peut plus faire de groupe.

RÈGLE

Critères de divisibilité. Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ; par **5** s'il est 0 ou 5 ; par **10** s'il est 0. Il est divisible par **3**, ou par **9**, si la **somme de ses chiffres** l'est. Exemple : 7 245 se termine par 5 et $7 + 2 + 4 + 5 = 18$; il est divisible par 3, 5 et 9, mais ni par 2 ni par 10.

LISTER TOUS LES DIVISEURS D'UN NOMBRE

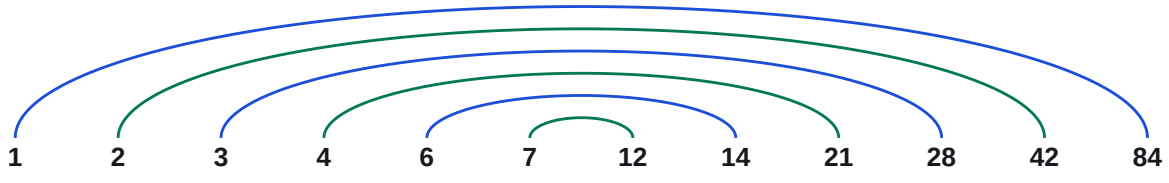
1. Essayer 1, 2, 3… dans l'ordre. Chaque fois que d divise n, noter **la paire** d et $n \div d$.
2. S'arrêter dès que $d \times d$ dépasse n : les paires suivantes sont déjà écrites.
3. Ranger les diviseurs dans l'ordre croissant, sans oublier 1 et n.

EXEMPLE

Lister tous les diviseurs de 84.

1. Les essais de 1 à 7 donnent six paires :
$84 = 1 \times 84 = 2 \times 42 = 3 \times 28 = 4 \times 21 = 6 \times 14 = 7 \times 12$
2. 5, 8 et 9 ne divisent pas 84 : il se termine par 4, $84 = 8 \times 10 + 4$, et $8 + 4 = 12$. On s'arrête, car $10 \times 10 = 100$ dépasse 84.

84 a douze diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.



1 × 84 = 2 × 42 = 3 × 28 = 4 × 21 = 6 × 14 = 7 × 12 = 84

Chaque arc relie deux diviseurs de produit 84 : les petits, jusqu'à 7, donnent tous les autres.

Propriété démontrée : si deux nombres sont des multiples de d, leur somme aussi, et leur différence de même. Démonstration : si $a = d \times k$ et $b = d \times m$, alors $a + b = d \times (k + m)$ par distributivité. Ainsi $721 = 700 + 21$ est un multiple de 7.

PIÈGE

Écrire « 6 est un multiple de 42 », puisque $42 = 6 \times 7$. — c'est l'inverse : 42 est un multiple de 6, et 6 un diviseur de 42. Un multiple non nul est au moins aussi grand que le nombre.

Ce que ça coûte : la question entière.

Le réflexe : dans $42 = 6 \times 7$, le nombre seul est le multiple ; les facteurs sont ses diviseurs.

PIÈGE

Écrire $50 = 7 \times 6 + 8$ et annoncer un reste de 8. — l'égalité est juste, mais le reste doit être **inférieur au diviseur** : avec 8, on fait encore un groupe de 7. La division euclidienne est $50 = 7 \times 7 + 1$.

Ce que ça coûte : le quotient et le reste.

Le réflexe : vérifier $r < b$ avant de conclure.

PIÈGE

Dire que 43 est divisible par 3 « parce qu'il se termine par 3 ». — le dernier chiffre ne décide que pour 2, 5 et 10. Ici $4 + 3 = 7$: 43 n'est pas divisible par 3.

Ce que ça coûte : la réponse, puis la décomposition qui s'en sert.

Le réflexe : 3 et 9 : somme des chiffres ; 2, 5 et 10 : dernier chiffre.

2 Les nombres premiers jusqu'à 100

DÉFINITION

Un **nombre premier** est un entier qui a **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même. 13 est premier ; 15 ne l'est pas, car $15 = 3 \times 5$. **1 n'est pas premier** : il n'a qu'un diviseur. **2 est le seul nombre premier pair.** Il y en a 25 inférieurs à 100 ; ceux jusqu'à 30, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29, se savent par cœur.

LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

1. Écrire les entiers de 1 à 100 et barrer 1.
2. Garder 2 et barrer ses autres multiples ; garder le premier nombre non barré, 3, et barrer ses autres multiples ; de même avec 5, puis 7.
3. Après 7, il n'y a plus rien à barrer : les nombres restés libres sont les nombres premiers.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Le crible achevé : les 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont en bleu, sur fond plus soutenu jusqu'à 30.

PROPRIÉTÉ

Un nombre compris entre 2 et 120 qui n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 est premier. Démonstration : sinon, il s'écrirait $a \times b$ avec a et b entiers au moins égaux à 2. Ni a ni b n'est divisible par 2, 3, 5 ou 7, sinon le produit le serait. Or tous les entiers de 2 à 10 le sont : a et b valent au moins 11, et $a \times b$ au moins 121. Impossible.

EXEMPLE

91 est-il premier ? Et 97 ?

1. 91 et 97 sont impairs, ne se terminent ni par 0 ni par 5, et $9 + 1 = 10$, $9 + 7 = 16$: ni 2, ni 3, ni 5 ne les divisent. Reste 7 : $91 = 7 \times 13$
2. Pour 97, le test par 7 laisse un reste ; comme $97 < 121$, la propriété s'applique. $97 = 7 \times 13 + 6$

91 n'est pas premier, car $91 = 7 \times 13$; 97 est premier.

PIÈGE

Compter 1 parmi les nombres premiers. — 1 n'a qu'un diviseur. S'il était premier, la décomposition ne serait plus unique : $6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3$.

Ce que ça coûte : la réponse, et toute décomposition où l'on écrit 1.

Le réflexe : la liste commence à 2.

PIÈGE

Croire que 51, 57 ou 87 sont premiers parce qu'ils sont impairs et « en ont l'air ». — $51 = 3 \times 17$, $57 = 3 \times 19$ et $87 = 3 \times 29$: la somme des chiffres le révèle.

Ce que ça coûte : la réponse, et une décomposition arrêtée trop tôt.

Le réflexe : faire les quatre tests 2, 3, 5 et 7, toujours.

3 Décomposer en produit de facteurs premiers

PROPRIÉTÉ

Tout entier supérieur ou égal à 2 est premier ou s'écrit comme un produit de nombres premiers, et cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près (propriété admise). C'est sa **décomposition en produit de facteurs premiers**. On range les facteurs dans l'ordre croissant et on regroupe les facteurs répétés en puissances : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

LA DIVISION EN ESCALIER

1. Diviser par **le plus petit nombre premier qui divise** le nombre (2, puis 3, 5, 7, 11…) et écrire le quotient en dessous.
2. Recommencer avec le quotient jusqu'à obtenir 1 : la colonne de droite ne contient que des nombres premiers.
3. Écrire leur produit avec des puissances, puis **recalculer ce produit** pour vérifier.

EXEMPLE

Décomposer 924 en produit de facteurs premiers.

1. 924 est pair, 462 aussi : $924 \div 2 = 462$, puis $462 \div 2 = 231$.
2. $2 + 3 + 1 = 6$: 231 est divisible par 3, $231 \div 3 = 77$; puis $77 \div 7 = 11$, et 11 est premier.
3. Vérification :
   $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 = 4 \times 3 \times 77 = 924$

$\underline{924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11.}$

quotients	premiers
924	2
462	2
231	3
77	7
11	11
1	*fin*

L'escalier de 924 : la décomposition se lit à droite.



Deux arbres pour 360, deux chemins : les mêmes feuilles entourées, trois 2, deux 3 et un 5. C'est l'unicité de la décomposition.

PIÈGE

S'arrêter à $360 = 2^3 \times 45$. — 45 n'est pas premier : $45 = 3^2 \times 5$. Une décomposition ne contient **que** des nombres premiers : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Ce que ça coûte : la décomposition, et la simplification qui s'en servait.

Le réflexe : passer chaque facteur au test 2, 3, 5, 7.

PIÈGE

Oublier un facteur en recopiant l'escalier : $924 = 2 \times 3 \times 7 \times 11.$ — ce produit vaut 462 : un des deux 2 est perdu.

Ce que ça coûte : le résultat, alors que l'escalier était juste.

Le réflexe : recalculer le produit, qui doit redonner le nombre de départ.

4 Fractions égales, fractions simplifiées

PROPRIÉTÉ

Rappel. On ne change pas une fraction en multipliant, ou en divisant, son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$. Ainsi $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 7}{12 \times 7} = \frac{35}{84}$. Et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque $a \times d = b \times c$, et seulement dans ce cas.

SIMPLIFIER AVEC LA DÉCOMPOSITION

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.
2. Barrer les facteurs communs, **un en haut contre un en bas** : c'est diviser les deux termes par un même nombre.
3. Multiplier ce qui reste. Plus aucun facteur commun : la fraction est simplifiée au maximum.

EXEMPLE

Simplifier au maximum $\frac{126}{180}$.

1. On décompose, puis on barre un 2 et deux 3, en haut comme en bas ; un 2 reste en bas.
   $\frac{126}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}$

$\underline{\frac{126}{180} = \frac{7}{10} \text{ : 7 et 10 n'ont plus de facteur commun.}}$

EXEMPLE

Parmi $\frac{35}{84}$, $\frac{45}{108}$ et $\frac{65}{144}$, lesquelles sont égales ?

1. On simplifie les deux premières : $\frac{35}{84} = \frac{5\times7}{2^2\times3\times7} = \frac{5}{12}$ et : $\frac{45}{108} = \frac{3^2\times5}{2^2\times3^3} = \frac{5}{12}$
2. $65 = 5 \times 13$ et $144 = 2^4 \times 3^2$ n'ont aucun facteur commun ; or $\frac{5}{12} = \frac{60}{144}$.

~~$\frac{35}{84} = \frac{45}{108}$~~**, et $\frac{65}{144}$ est différente.**

PIÈGE

Simplifier dans une somme : $\frac{3+7}{3+8} = \frac{7}{8}$ « en barrant les 3 ». — la fraction vaut $\frac{10}{11}$. On ne barre qu'un **facteur** commun à deux **produits**.

Ce que ça coûte : le résultat, et la méthode.

Le réflexe : un signe + ou − au numérateur : calculer d'abord, barrer ensuite.

PIÈGE

Barrer un 2 en haut contre tout le 2^2 du bas : $\frac{126}{180} = \frac{7}{5}$. — $2^2 = 2 \times 2$: un seul 2 s'en va. D'ailleurs $\frac{7}{5} > 1$, alors que $126 < 180$.

Ce que ça coûte : le résultat.

Le réflexe : écrire les puissances en produits avant de barrer.

5 Résoudre des problèmes de divisibilité

RECONNAÎTRE UN PROBLÈME DE PARTAGE

1. **Le signal** : des objets à répartir en parts **identiques**, **sans reste**. Le nombre de parts **divise** le nombre d'objets.
2. Deux sortes d'objets à répartir toutes les deux : le nombre de parts divise **les deux** nombres, c'est un **diviseur commun**.
3. Lister les diviseurs communs grâce aux décompositions, puis répondre à la question posée : un nombre de parts, ou la composition d'une part, qui n'est pas la même réponse.

EXEMPLE

Un club prépare des sachets identiques avec 60 bonbons à la fraise et 84 à la menthe, en utilisant tous les bonbons. Quelles compositions sont possibles, avec au moins deux sachets ?

1. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$: un diviseur commun ne contient que des facteurs communs, au plus 2^2 et 3. Ce sont les diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
2. On divise les deux quantités ; pour 12 sachets : $60 \div 12 = 5$ et $84 \div 12 = 7$. Le tableau donne les autres cas.

2, 3, 4, 6 ou 12 sachets ; avec 12 sachets, chacun contient 5 bonbons à la fraise et 7 à la menthe.

sachets	fraise par sachet	menthe par sachet
2	30	42
3	20	28
4	15	21
6	10	14
12	5	7

Les cinq compositions possibles : le nombre de sachets divise à la fois 60 et 84.

PIÈGE

Proposer 5 sachets, parce que 5 divise 60. — $84 = 5 \times 16 + 4$: il resterait 4 bonbons à la menthe.

Ce que ça coûte : la réponse, et toute la liste.

Le réflexe : vérifier chaque nombre de parts sur **les deux** quantités.

À VÉRIFIER

- Reste **plus petit** que le diviseur ? Somme des chiffres pour 3 et 9 ?
- « Premier » : testé par 2, 3, 5 et 7 ? 1 laissé de côté ?
- Décomposition : **que** des nombres premiers ? Produit **recalculé** ?
- Barré des **facteurs**, un contre un, jamais dans une somme ?
- Partage : le nombre de parts divise-t-il **chaque** quantité ?

À RETENIR

- b divise a : $a = b \times k$, reste **nul**. Critères : **dernier chiffre** pour 2, 5, 10 ; **somme des chiffres** pour 3, 9.
- Premier : **exactement deux diviseurs**. 1 ne l'est pas ; jusqu'à 120, tester **2, 3, 5 et 7** suffit.
- Décomposer : diviser par le plus petit premier possible jusqu'à 1, puis **recalculer le produit**.
- Simplifier : barrer des **facteurs premiers communs**, un en haut contre un en bas.
- Partage en parts identiques : le nombre de parts est un **diviseur commun**.