

COURS

Équations et inéquations du premier degré

4^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Une équation est une **balance**. Tout ce qu'on fait d'un côté, on le fait de l'autre, sinon elle penche et l'égalité est perdue. Ce seul principe suffit à résoudre toutes les équations du premier degré — le reste n'est que de l'organisation.

1 Résoudre, c'est isoler

DÉFINITION

Une **solution** est un nombre qui rend l'égalité vraie quand on le met à la place de x . Résoudre, c'est trouver **toutes** les solutions — souvent une seule au premier degré, parfois aucune, parfois une infinité.

on retire 5 des deux côtés : la balance reste en équilibre



jamais « on fait passer de l'autre côté » : on retire, on ajoute, on divise — des deux côtés

Deux gestes seulement : enlever les constantes, puis diviser par le coefficient.

LA RÉOLUTION ALGÈBRE DE $AX + B = C$

- ① Retirer b des **deux** côtés pour isoler le terme en x .
- ② Diviser les deux côtés par a , le coefficient de x .
diviser par a n'est légitime que si $a \neq 0$ — sinon il n'y a plus d'inconnue.
- ③ Vérifier en remplaçant x par la valeur trouvée dans l'équation **de départ**, pas dans une ligne intermédiaire.

On dit **résolution algébrique** parce qu'elle procède par calcul, et qu'elle donne la valeur **exacte**. Une équation se résout aussi graphiquement — en traçant les deux membres comme deux fonctions et en lisant l'abscisse du point d'intersection — mais la lecture d'un graphique ne donne jamais qu'une valeur approchée. Le graphique contrôle ; l'algèbre décide.

EXEMPLE

Résoudre $5x - 7 = 2x + 8$.

- ① On rassemble les x à gauche en retirant $2x$ des deux côtés :
 $3x - 7 = 8$
- ② On ajoute 7 des deux côtés :
 $3x = 15$
- ③ On divise par 3 :
 $15/3 = 5$
- ④ Vérification dans l'équation de départ : à gauche $5 \times 5 - 7 = 18$, à droite $2 \times 5 + 8 = 18$.
 $5 \times 5 - 7 = 18$

x = 5

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Oublier de changer le signe quand un terme change de côté. — « faire passer de l'autre côté » n'est pas une opération : c'est un raccourci qui cache l'addition ou la soustraction réellement faite. Quand on ne voit plus l'opération, on ne voit plus le signe.

Le réflexe : écrire l'opération dans la marge — « $-2x$ des deux côtés » — au moins jusqu'à ce que le geste soit automatique.

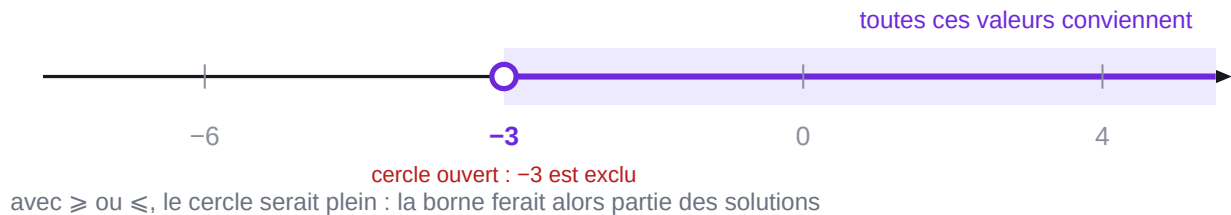
2 Les inéquations, et le piège du signe

RÈGLE

Une inéquation se résout comme une équation, **sauf sur un point** : multiplier ou diviser les deux côtés par un nombre **néglatif** **renverse le sens** de l'inégalité.

$$-2x < 6 \iff x > -3$$

l'ensemble des solutions de $x > -3$, hachuré sur la droite graduée



Cercle ouvert pour une inégalité stricte, plein quand la borne est incluse.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Résoudre $-3x > 12$ en écrivant $x > -4$. — diviser par -3 renverse l'inégalité. La bonne réponse est $x < -4$, et l'oubli du renversement donne l'ensemble exactement opposé — la pire erreur possible, puisqu'elle a l'air d'une réponse.

Le réflexe : tester une valeur. Pour $x = 0$: $-3 \times 0 = 0$, qui n'est pas supérieur à 12. Zéro n'est donc pas solution, ce qui exclut $x > -4$.

Une équation peut n'avoir **aucune** solution — $2x + 1 = 2x + 5$ donne $1 = 5$, ce qui est faux quel que soit x — ou en avoir une **infinité** — $2(x + 3) = 2x + 6$ donne $6 = 6$, vrai pour tout x . Ces deux cas se reconnaissent au moment où l'inconnue disparaît.

3 Mettre un problème en équation

DU TEXTE À L'ÉQUATION, EN QUATRE TEMPS

- 1 **Nommer l'inconnue** avec son unité : « soit x la largeur, en cm ». Une lettre sans phrase ne vaut rien. c'est la seule étape que le correcteur peut vérifier sans refaire le calcul, et elle est notée à part.
- 2 **Exprimer les autres grandeurs** en fonction de x — la longueur devient $x + 7$, le second nombre $30 - x$.
- 3 **Traduire la phrase qui contient une égalité** : « le périmètre est de 46 cm » donne le signe $=$.
- 4 **Répondre par une phrase**. « $x = 8$ » n'est pas une réponse : « la largeur mesure 8 cm » en est une.

Le choix de l'inconnue n'est pas imposé : on peut prendre la longueur plutôt que la largeur. Une équation différente mènera au même couple de dimensions — mais l'une des deux est presque toujours plus simple à écrire. Prendre **la plus petite grandeur** évite les soustractions.

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit l'opération faite des deux côtés, plutôt que « je fais passer » ?
- Ai-je renversé l'inégalité si j'ai divisé par un nombre négatif ?
- Ai-je vérifié dans l'énoncé de départ ?
- Ai-je répondu par une phrase, avec l'unité ?

À RETENIR

- Une équation est une **balance** : ce qu'on fait d'un côté, on le fait de l'autre.
- Ne jamais dire « faire passer » : dire l'opération, et le signe suivra.
- Vérifier dans l'équation **de départ**, jamais dans une ligne intermédiaire.
- Diviser une inéquation par un **néglatif** **renverse** le sens de l'inégalité.
- Cercle **ouvert** pour $<$ et $>$, **plein** pour $\leq$ et $\geq$.
- Si l'inconnue disparaît : soit aucune solution, soit une infinité.