

Introduction aux fonctions

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Une fonction est une **machine** : on entre un nombre, il en sort exactement un autre. Toute la nouveauté du chapitre tient dans ce mot *exactement* — et dans le vocabulaire qui permet de dire lequel entre et lequel sort. Confondre image et antécédent coûte plus de points que n'importe quel calcul.

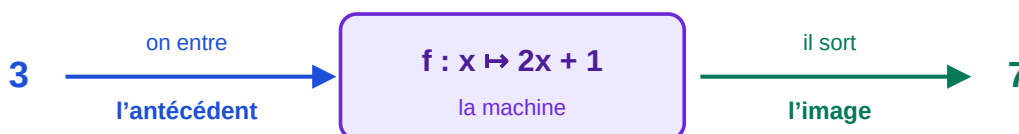
1 Image et antécédent

DÉFINITION

Si $f(3) = 7$, alors **7 est l'image de 3**, et **3 est un antécédent de 7**. L'image se calcule, l'antécédent se cherche. Un nombre a toujours **une seule image**, mais peut avoir plusieurs antécédents — ou aucun.

$$f : x \mapsto f(x)$$

on entre un nombre, il en sort exactement un autre — jamais deux



on note $f(3) = 7$, et on lit « f de 3 égale 7 »

L'antécédent entre, l'image sort. L'ordre du vocabulaire suit celui de la flèche.

CALCULER UNE IMAGE, CHERCHER UN ANTÉCÉDENT

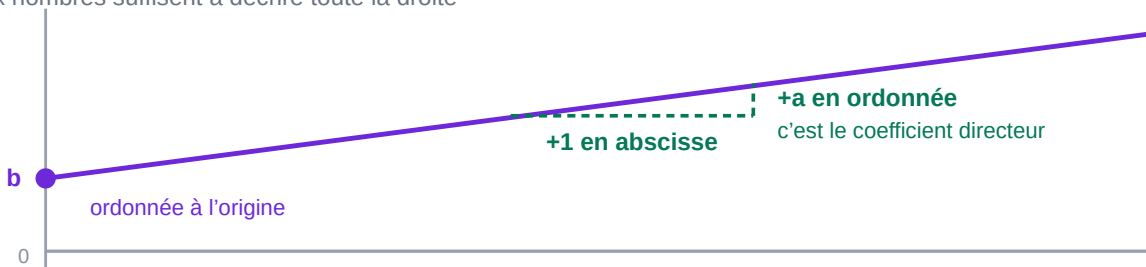
- ① **Une image se calcule** : on remplace x par le nombre donné et on effectue.
- ② **Un antécédent se cherche** : on écrit $f(x) =$ la valeur voulue, et on résout l'équation.
c'est là que le chapitre précédent sert — un antécédent est la solution d'une équation.
- ③ Vérifier en refaisant le chemin dans l'autre sens : l'antécédent trouvé doit bien redonner l'image de départ.

2 Fonctions linéaires et affines

DÉFINITION

Une fonction **linéaire** s'écrit $f(x) = ax$: elle traduit une situation de proportionnalité, et sa représentation passe par l'origine.
Une fonction **affine** s'écrit $f(x) = ax + b$: c'est une linéaire décalée de b . Toute linéaire est affine ; l'inverse est faux, sauf si $b = 0$.

deux nombres suffisent à décrire toute la droite



si $b = 0$ la droite passe par l'origine : la fonction est linéaire

a mesure la pente, b dit où la droite coupe l'axe vertical.

PROPRIÉTÉ

La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**. Le coefficient directeur a se lit comme le déplacement vertical pour un déplacement horizontal de 1 ; l'ordonnée à l'origine b est la valeur de $f(0)$.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Le **sens de variation** se lit directement sur a : si $a > 0$ la fonction est croissante, si $a < 0$ elle est décroissante, et si $a = 0$ elle est constante. Aucun calcul n'est nécessaire — c'est l'un des rares endroits du programme où le signe d'un nombre donne toute la réponse.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Répondre « 3 » à la question « quelle est l'image de 3 par f ? » — l'image de 3 est $f(3)$, pas 3. L'inversion vient de la lecture du tableau de valeurs, où les deux nombres se côtoient sans que rien n'indique lequel est entré et lequel est sorti.

Le réflexe : relire la phrase en remplaçant par la machine : « ce qui sort quand j'entre 3 ». Ce qui entre est l'antécédent, ce qui sort est l'image.

3 Du tableau au graphique

TRACER UNE FONCTION AFFINE EN DEUX POINTS

- 1 Calculer deux images seulement — souvent $f(0)$ et $f(1)$, ou deux valeurs qui tombent juste.
deux points définissent une droite ; en calculer cinq ne la rend pas plus droite, cela use du temps.
- 2 Placer les deux points, tracer, puis **prolonger de part et d'autre** : une fonction affine ne s'arrête pas aux points calculés.
- 3 Contrôler avec un troisième point. S'il n'est pas aligné, c'est un calcul qui est faux, pas la règle.

EXEMPLE

Tracer $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ et lire l'antécédent de 0.

- 1 Deux valeurs commodes :
 $-\frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3$
- 2 Et pour $x = 4$, choisi parce qu'il tombe juste :
 $-\frac{1}{2} \times 4 + 3 = 1$
- 3 La droite passe par $(0; 3)$ et $(4; 1)$. Elle coupe l'axe horizontal en $x = 6$, ce qu'on confirme par le calcul :
 $-\frac{1}{2} \times 6 + 3 = 0$

l'antécédent de 0 est 6, lu puis vérifié

Une lecture graphique donne un ordre de grandeur, jamais une valeur exacte : sur une copie, elle s'annonce comme telle — « environ 6 » — et se confirme par le calcul quand l'énoncé le permet. Écrire un résultat exact lu sur un dessin est une affirmation qu'on ne peut pas soutenir.

À VÉRIFIER

- Image ou antécédent ? Ce qui **entre** est l'antécédent, ce qui **sort** est l'image.
- Pour un antécédent, ai-je bien posé et résolu une équation ?
- $a > 0$ croissante, $a < 0$ décroissante — ai-je regardé le signe avant de calculer ?
- Ai-je vérifié qu'un point du graphique satisfait bien mon expression de f ?

À RETENIR

- Ce qui **entre** est l'antécédent, ce qui **sort** est l'image.
- Une image se **calcule**, un antécédent se **cherche** — en résolvant une équation.
- Un nombre a **une seule image**, mais peut avoir plusieurs antécédents.
- **Linéaire** : $f(x) = ax$, la droite passe par l'origine. **Affine** : $f(x) = ax + b$.
- a est la pente, b vaut $f(0)$ — l'ordonnée à l'origine.
- $a > 0$ croissante, $a < 0$ décroissante : le signe suffit.