COURS

4e

# Calcul fractionnaire — Opérations et inverse

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

En 5e, on a commencé à calculer avec des fractions. En 4e, les quatre opérations s'étendent à **tous les nombres rationnels**, positifs ou négatifs, et une notion nouvelle les relie : l'**inverse**. Trois règles font le chapitre : **pour additionner, on met au même dénominateur ; pour multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ; diviser, c'est multiplier par l'inverse.**

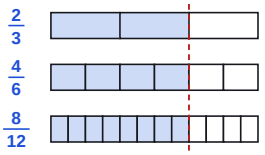
## 1 Nombres rationnels et fractions égales

**DÉFINITION**

Soit $a$ et $b$ deux nombres, $b \neq 0$. Le **quotient** $\frac{a}{b}$ est **le nombre qui, multiplié par** $b$**, donne** $a$ : $\frac{a}{b} \times b = a$. Un **nombre rationnel** est le quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul : $\frac{3}{4}$, $5 = \frac{5}{1}$, $-0{,}3 = \frac{-3}{10}$. Par la règle des signes, on écrit le signe devant la fraction : $\frac{5}{-3} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$. Le quotient de deux décimaux n'est **pas toujours décimal** : $1 \div 3 = 0{,}333\ldots$ sans fin ; la calculatrice n'en donne qu'une **valeur approchée**, la **valeur exacte** est $\frac{1}{3}$.

**PROPRIÉTÉ**

**Fractions égales (rappel de 5e).** On ne change pas un quotient en multipliant, ou en divisant, son numérateur **et** son dénominateur par **un même nombre non nul** : $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$. **Test des produits en croix**, à savoir par cœur : pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ exactement lorsque $a \times d = b \times c$. Le sens direct se démontre en multipliant les deux nombres égaux par $b \times d$ ; la réciproque est admise.




$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ : *même longueur coloriée. Test :* $2 \times 6 = 3 \times 4$.

**SIMPLIFIER, PUIS RÉDUIRE AU MÊME DÉNOMINATEUR**

1. **Simplifier** : diviser le numérateur et le dénominateur par un même diviseur commun. La recherche des diviseurs communs par les nombres premiers a sa propre fiche, « Nombres premiers ».
   $\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$
2. **Choisir un dénominateur commun** : un multiple commun des dénominateurs, le plus petit possible. Pour $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$ : parmi les multiples de 6 (6, 12, 18…), 12 est le premier multiple de 4.
3. **Transformer chaque fraction**, numérateur et dénominateur multipliés par le même nombre. Au même dénominateur positif, deux nombres se **comparent** comme leurs numérateurs : $-10 < -9$, donc $-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4}$.
   $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$ $\quad$ $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

**EXEMPLE**

Les fractions $\frac{21}{35}$ et $\frac{15}{25}$ sont-elles égales ?

1. Test des produits en croix : on compare $21 \times 25$ et $35 \times 15$.
   $21 \times 25 = 35 \times 15 = 525$

**les produits sont égaux, donc les fractions aussi : toutes deux valent $\frac{3}{5}$.**

**PIÈGE**

**Ajouter le même nombre en haut et en bas : « $\frac{2}{3} = \frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$ ».** — seules la multiplication et la division conservent le quotient. Le test le dit : $2 \times 4 = 8$ mais $3 \times 3 = 9$, donc $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{4}$.

**Ce que ça coûte :** le nombre a changé : tout le calcul qui suit est faux.

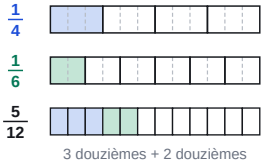
**Le réflexe :** devant deux fractions qu'on croit égales, faire le test des produits en croix.

## 2 Additionner et soustraire

**RÈGLE**

Avec **le même dénominateur**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on **garde le dénominateur**. Sinon, on se ramène d'abord au même dénominateur. Cette règle se démontre à partir de la définition du quotient : c'est l'exercice 8.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$




3 douzièmes + 2 douzièmes

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ : *recoupés en douzièmes, les morceaux s'ajoutent.*

**ADDITIONNER OU SOUSTRAIRE DEUX FRACTIONS**

1. **Même dénominateur**, positif. Un entier s'écrit avec le dénominateur voulu : $3=\frac{12}{4}$.
2. **Additionner ou soustraire les numérateurs** sur une seule barre, et **garder le dénominateur**.
3. **Simplifier** si possible, et placer le signe devant la fraction.

**EXEMPLE**

Calculer $A=\frac{5}{6}-\frac{7}{4}$ et $B=3-\frac{5}{4}$.

1. Dénominateur commun de 6 et 4 : 12.
$$A=\frac{10}{12}-\frac{21}{12}=\frac{10-21}{12}=-\frac{11}{12}$$
2. L'entier 3 s'écrit en quarts :
$$B=\frac{12}{4}-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

$\underline{A=-\frac{11}{12}\text{ et }B=\frac{7}{4}.}$

**PIÈGE**

**Additionner les numérateurs et les dénominateurs : « $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{10}$ ».** — on n'ajoute pas des quarts et des sixièmes sans les convertir. D'ailleurs $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ est **plus petit** que $\frac{1}{4}$ : ajouter un nombre positif ne peut pas faire diminuer.

**Ce que ça coûte :** le résultat, et tous les calculs qui s'appuient dessus.

**Le réflexe :** même dénominateur d'abord, en multipliant **aussi** le numérateur ; puis contrôler : la somme de deux positifs dépasse chacun d'eux.

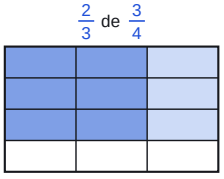
## 3 Multiplier

**RÈGLE**

Pour **multiplier**, on multiplie **les numérateurs entre eux** et **les dénominateurs entre eux**, sans dénominateur commun. Un entier $k$ s'écrit $\frac{k}{1}$ : il ne multiplie que le numérateur.

**Démonstration** ($b$ et $d$ non nuls) : on note $x=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ ; en regroupant les facteurs, $x\times(b\times d)=\left(\frac{a}{b}\times b\right)\times\left(\frac{c}{d}\times d\right)=a\times c$ par définition du quotient. $x$ est donc le nombre qui, multiplié par $b\times d$, donne $a\times c$ : c'est $\frac{a\times c}{b\times d}$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$




6 cases foncées sur 12

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

**MULTIPLIER EN SIMPLIFIANT D'ABORD**

1. **Le signe d'abord** : un nombre pair de facteurs négatifs donne un produit positif, un nombre impair un produit négatif.
2. **Tout écrire sur une seule barre**, sans effectuer, en décomposant les nombres en produits.
3. **Simplifier** les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, puis multiplier ce qui reste.

**EXEMPLE**

Calculer $C = -\dfrac{5}{6} \times \dfrac{9}{10}$.

(1) Un facteur négatif : le produit est négatif. Sur une barre, en décomposant :

$$C = -\frac{5 \times 9}{6 \times 10} = -\frac{5 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 2 \times 5}$$

(2) On simplifie par 5 et par 3 :

$$C = -\frac{3}{2 \times 2} = -\frac{3}{4}$$

**$C = -\frac{3}{4}$, sans jamais écrire $\frac{45}{60}$.**

**PIÈGE**

**Multiplier un entier en haut et en bas : « $3 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{15}$ ».** — $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$ : le nombre n'a pas changé, il n'a donc pas été multiplié par 3. Comme $3 = \dfrac{3}{1}$, le dénominateur est multiplié par 1.

**Ce que ça coûte :** un résultat faux d'un facteur 3.

**Le réflexe :** écrire l'entier $\dfrac{3}{1}$ avant de multiplier : $3 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{5}$. Et ne simplifier que des **facteurs** : $\dfrac{3+8}{3}$ vaut $\dfrac{11}{3}$, pas 8.

## 4 L'inverse, pour diviser

**DÉFINITION**

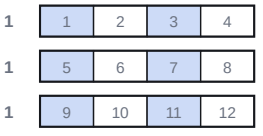
Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque **leur produit est égal à 1**. Tout nombre $x$ **non nul** a un inverse, noté $\dfrac{1}{x}$ : l'inverse de 5 est $\dfrac{1}{5}$, soit 0,2. Pour $a$ et $b$ non nuls, l'inverse de $\dfrac{a}{b}$ est $\dfrac{b}{a}$, car $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{a \times b}{b \times a} = 1$. Un nombre et son inverse ont **le même signe**, puisque leur produit est positif. **0 n'a pas d'inverse** : multiplié par n'importe quel nombre, il donne 0, jamais 1.

| nombre | opposé | inverse |
|---|---|---|
| signe | change | le même |
| $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |
| −4 | 4 | $-\frac{1}{4}$ |
| 0 | 0 | aucun |

*L'opposé change le signe, l'inverse le garde.*

**PROPRIÉTÉ**

**Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse** : pour $b$, $c$, $d$ non nuls, $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$. **Démonstration** : $\left(\dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}\right) \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times 1 = \dfrac{a}{b}$, donc $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ est le nombre qui, multiplié par $\dfrac{c}{d}$, donne $\dfrac{a}{b}$ : c'est, par définition, le quotient de $\dfrac{a}{b}$ par $\dfrac{c}{d}$.




$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$

*Combien de quarts dans 3 ? Douze.*

**DIVISER PAR UNE FRACTION**

(1) **Repérer le diviseur** : le nombre qui suit ÷, ou celui qui est sous la grande barre d'une fraction à étages.

(2) Le **remplacer par son inverse**, changer ÷ en × et multiplier. Seul le diviseur est retourné.

**EXEMPLE**

Calculer $D = -\dfrac{4}{9} \div \dfrac{2}{3}$ et $E = \dfrac{\frac{5}{2}}{10}$.

(1) On multiplie par l'inverse du diviseur :

$$D = -\frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = -\frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 3 \times 2} = -\frac{2}{3}$$

(2) La grande barre divise par 10 : on multiplie par l'inverse de 10.

$$E = \frac{5}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{2 \times 2 \times 5} = \frac{1}{4}$$

**$D = -\frac{2}{3}$ et $E = \frac{1}{4}$.**

**PIÈGE**

**Changer le signe en prenant l'inverse : « l'inverse de $-\dfrac{2}{3}$ est $\dfrac{3}{2}$ ».** — $-\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2} = -1$, pas 1. C'est l'**opposé** qui change le signe ; l'inverse de $-\dfrac{2}{3}$ est $-\dfrac{3}{2}$.

**Ce que ça coûte :** le signe du résultat, donc le résultat.

**Le réflexe :** vérifier que le produit vaut 1, signe compris ; et ne retourner que le **diviseur**, jamais le premier nombre.

## 5 Enchaîner les calculs, résoudre des problèmes

**EXEMPLE**

**Les priorités sont celles des entiers** : parenthèses, puis $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$. Calculer $F = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}$.

1. La multiplication d'abord :
$$\frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{5}{6}$$
2. Puis la soustraction, au dénominateur 12 :
$$F = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{1}{12}$$

**$F = -\frac{1}{12}$. Calculer de gauche à droite aurait donné $-\frac{1}{3}$ : c'est faux.**

**RÉSOUDRE UN PROBLÈME AVEC DES FRACTIONS**

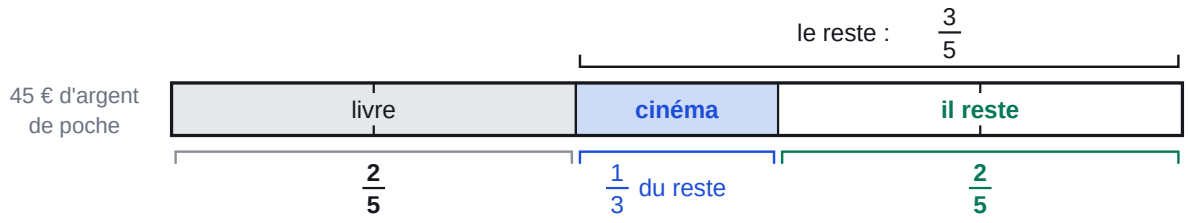
1. **Traduire** : « les $\frac{2}{3}$ de… » donne une multiplication ; des parts réunies, une addition ; le tout vaut 1, et le reste se calcule à partir de 1.
2. **Dire de quoi chaque fraction est la fraction** : du total, ou **du reste** ? Puis **contrôler** (les parts redonnent le tout) et **conclure** par une phrase, avec l'unité.

**EXEMPLE**

Léo a 45 € d'argent de poche. Il en dépense $\frac{2}{5}$ pour un livre, puis $\frac{1}{3}$ **du reste** au cinéma. Quelle fraction de son argent lui reste-t-il ? Combien d'euros ?

1. Après le livre, il reste $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ; le cinéma en prend le tiers :
$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$
2. Il reste $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ de l'argent, soit en euros :
$$\frac{2}{5} \times 45 = 18$$

**il reste à Léo les deux cinquièmes de son argent, soit 18 € ; contrôle : livre 18 €, cinéma 9 €, et $18 + 9 + 18 = 45$.**




*Le cinéma prend un tiers **du reste**, c'est-à-dire un cinquième de l'argent de départ.*

**PIÈGE**

**Prendre la fraction du total au lieu du reste : « $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$ ».** — le tiers porte sur les $\frac{3}{5}$ qui restent, pas sur les 45 € de départ.

**Ce que ça coûte :** la réponse au problème, même si chaque calcul est juste.

**Le réflexe :** écrire à côté de chaque fraction ce dont elle est la fraction, puis multiplier.

**À VÉRIFIER**

- Addition : **même dénominateur**, numérateur multiplié lui aussi ?
- Produit : simplifié **avant**, et seulement des facteurs ?
- Division : par l'**inverse du diviseur**, signe gardé ?
- **× et ÷ d'abord** ; « du reste » ou « du total » ; résultat contrôlé ?

**À RETENIR**

- **Même dénominateur** pour additionner ou soustraire, numérateurs multipliés eux aussi.
- Multiplier : **numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux** ; simplifier avant d'effectuer.
- L'**inverse** de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ : produit 1, même signe. 0 n'a pas d'inverse.
- **Diviser**, c'est multiplier par l'inverse du diviseur.
- « Les $\frac{2}{3}$ de » se traduit par $\frac{2}{3}\times$ ; une fraction **du reste** porte sur le reste.