

Probabilités — Calcul et arbres

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Une probabilité n'annonce rien sur la prochaine partie. Elle dit ce qui arrive **sur un très grand nombre d'essais** — et c'est précisément pour cela qu'elle est utile : le hasard d'une fois est imprévisible, celui de dix mille fois ne l'est plus.

1 Ce qu'une probabilité mesure

DÉFINITION

Un nombre compris **entre 0 et 1** qui mesure la chance qu'un événement se produise. Dans une situation d'équiprobabilité, on compte : nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles. $P = 0$ signifie impossible, $P = 1$ certain.

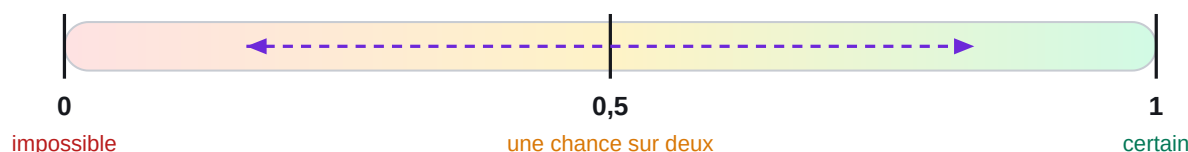
$$P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$$

RÈGLE

La probabilité de l'événement **contraire** complète à 1. C'est souvent le chemin le plus court : « au moins un » se calcule presque toujours par son contraire, « aucun ».

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

une probabilité vit entre 0 et 1 — ni pourcentage négatif, ni valeur supérieure à 1



$P(A)$ et $P(\bar{A})$ sont symétriques par rapport à 0,5 : leur somme fait toujours 1

Un résultat hors de cette échelle est forcément une erreur de calcul.

La **loi des grands nombres** est ce qui relie la théorie à l'expérience : plus on répète, plus la fréquence observée se rapproche de la probabilité. Cent lancers d'une pièce ne donnent presque jamais 50 piles exactement, mais dix mille lancers donnent une proportion très proche de 0,5. C'est une convergence, pas une compensation.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Croire qu'après cinq « pile » d'affilée, « face » devient plus probable. — la pièce n'a pas de mémoire. Chaque lancer reste indépendant et la probabilité reste $\frac{1}{2}$. Cette croyance porte un nom — le *sophisme du joueur* — et c'est ce qui fait vivre les casinos.

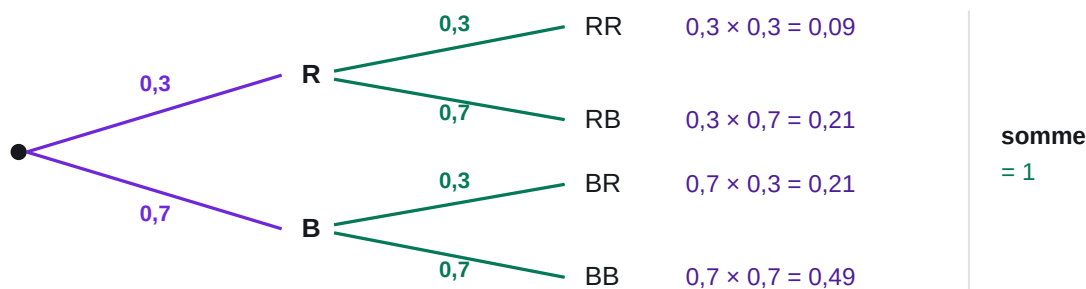
Le réflexe : se demander ce que la pièce sait de ce qui précède. La réponse est : rien.

2 L'arbre : les expériences composées

DÉFINITION

Une **expérience composée** enchaîne deux expériences aléatoires ou davantage : deux tirages successifs, un lancer suivi d'un autre, une roue puis un dé. L'arbre en est la représentation : chaque niveau de branches est une expérience, et chaque chemin complet, de la racine à une extrémité, est une **issue** de l'expérience composée.

on multiplie le long d'une branche, on additionne entre branches



La somme des quatre issues vaut 1 : c'est le contrôle qui attrape toutes les erreurs.

CONSTRUIRE L'ARBRE D'UNE EXPÉRIENCE COMPOSÉE

- 1 **Un niveau par expérience** : les branches du premier niveau sont les issues de la première expérience, celles du second niveau les issues de la seconde.
- 2 **Écrire la probabilité sur chaque branche**, jamais sur les nœuds. À chaque nœud, la somme des branches qui en partent vaut 1 — c'est le premier contrôle.
- 3 **Multiplier le long d'un chemin** pour obtenir la probabilité d'une issue composée.
on multiplie parce que les deux conditions doivent être remplies *toutes les deux*.
- 4 **Additionner entre chemins** quand plusieurs issues conviennent — et vérifier que la somme de tous les chemins vaut 1.

LIRE UN ARBRE

- 1 **Le long d'une branche, on multiplie** : la probabilité d'un chemin est le produit de ses étapes.
- 2 **Entre plusieurs branches, on additionne** : un événement qui se réalise de plusieurs façons cumule leurs probabilités.
- 3 Contrôler que la somme de toutes les issues vaut 1.
c'est gratuit et cela attrape la quasi-totalité des erreurs de recopie ou de multiplication.

EXEMPLE

Une urne contient 3 boules rouges et 7 bleues. On tire deux fois **avec remise**. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une rouge ?

- 1 Deux chemins conviennent : rouge puis bleue, ou bleue puis rouge.
- 2 Chacun vaut :
 $0,3 \times 0,7 = 0,21$
- 3 On additionne les deux :
 $0,21 + 0,21 = 0,42$

P = 0,42

Avec **remise**, les deux tirages sont indépendants et les probabilités du second niveau sont les mêmes qu'au premier. Sans remise, elles changent — l'urne n'a plus le même contenu. Repérer ce mot dans l'énoncé décide de tout l'arbre.

EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée, puis un dé équilibré à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir « pile » **et** un nombre pair ?

- 1 Deux expériences à la suite : c'est une expérience composée, et l'arbre a deux niveaux — deux branches, puis six.
- 2 La pièce.
 $P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$
- 3 Le dé : trois faces paires sur six.
 $P(\text{pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- 4 On multiplie le long du chemin.
 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- 5 Contrôle : les quatre chemins — pile/pair, pile/impair, face/pair, face/impair — valent chacun $\frac{1}{4}$, et leur somme vaut 1.
 $4 \times \frac{1}{4} = 1$

la probabilité vaut $\frac{1}{4}$, soit 0,25

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Additionner les probabilités le long d'un chemin de l'arbre. — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ annoncerait que « pile et un nombre pair » est certain, ce qui est absurde. Additionner répond à la question « l'un **ou** l'autre » ; multiplier répond à « l'un **et** l'autre ».

Le réflexe : le long d'un chemin, on multiplie — et le résultat est toujours **plus petit** que chacune des probabilités du chemin. Un produit qui grandit est une erreur.

3 Événements incompatibles

DÉFINITION

Deux événements sont **incompatibles** quand ils ne peuvent pas se produire en même temps : « obtenir un 2 » et « obtenir un 5 » sur un même lancer. Dans ce cas seulement, les probabilités s'additionnent directement.

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles}$$

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Les événements A « obtenir 1 ou 2 » et B « obtenir 6 » sont-ils incompatibles ? Et C « obtenir un nombre pair » et D « obtenir un multiple de 3 » ?

① A et B n'ont **aucune issue commune** : ils sont incompatibles. On peut donc additionner leurs probabilités.

$$P(A \text{ ou } B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

② C contient 2, 4, 6 ; D contient 3 et 6. **Le 6 appartient aux deux** : ils ne sont pas incompatibles.

③ Additionner donnerait $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$, alors que les issues favorables sont 2, 3, 4 et 6 — quatre issues.

$$P(C \text{ ou } D) = \frac{4}{6}$$

le 6, compté deux fois dans l'addition, explique exactement l'écart d'un sixième.

on n'additionne que si les deux événements ne peuvent pas se produire ensemble

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Additionner les probabilités de « obtenir un nombre pair » et « obtenir un multiple de 3 » sur un dé. — ces deux événements ne sont **pas** incompatibles : le 6 appartient aux deux. Les additionner le compterait deux fois, et donnerait $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ au lieu de $\frac{4}{6}$.

Le réflexe : avant d'additionner, chercher un cas qui appartient aux deux événements. S'il en existe un, l'addition directe est interdite.

À VÉRIFIER

- Mon résultat est-il bien entre 0 et 1 ?
- L'énoncé dit-il « avec » ou « sans remise » ? Je l'ai souligné ?
- Ai-je multiplié le long des branches et additionné entre elles ?
- La somme de toutes les issues de mon arbre vaut-elle 1 ?
- Avant d'additionner deux événements : peuvent-ils vraiment se produire ensemble ?

À RETENIR

- Une probabilité vit **entre 0 et 1** — un résultat hors bornes est une erreur.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$: « au moins un » passe presque toujours par « aucun ».
- Sur un arbre : **multiplier** le long d'une branche, **additionner** entre branches.
- La somme de toutes les issues vaut **1** — le contrôle le moins cher du chapitre.
- **Avec remise** : les tirages sont indépendants. **Sans remise** : tout change au second niveau.
- La pièce n'a pas de mémoire : cinq piles ne rendent pas face plus probable.