COURS

4e

Proportionnalité — Quatrième proportionnelle, graphiques

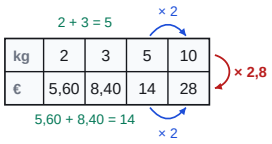
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

En 6e et en 5e, on a travaillé la proportionnalité dans des tableaux. En 4e, on la reconnaît aussi **sur un graphique**, on la retrouve dans des **formules** et en **géométrie**, et l'on choisit sa procédure pour calculer une quatrième proportionnelle. Tout tient en une phrase : **deux grandeurs sont proportionnelles quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre ; leur graphique est alors fait de points alignés avec l'origine.**

1 Reconnaître la proportionnalité : tableau et graphique

DÉFINITION

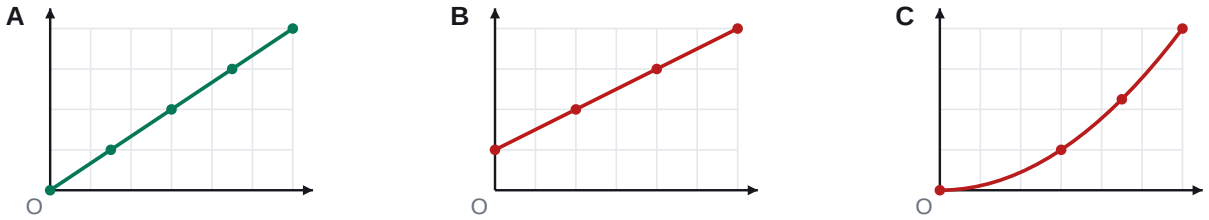
Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsqu'on obtient les valeurs de la seconde en multipliant celles de la première par **un même nombre** k, non nul, appelé **coefficient de proportionnalité** : $y = k \times x$. **Linéarité** (démontrée) : on obtient une nouvelle colonne du tableau en multipliant une colonne par un nombre, ou en additionnant deux colonnes, car $k \times x + k \times x' = k \times (x + x')$.



Chaque prix est la masse multipliée par 2,8. La colonne « 5 kg » est la somme des colonnes « 2 kg » et « 3 kg ».

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, une situation de proportionnalité est représentée par des points **alignés avec l'origine** du repère. **Réciproquement**, des points alignés avec l'origine représentent une situation de proportionnalité. Ces deux propriétés sont **admises**.

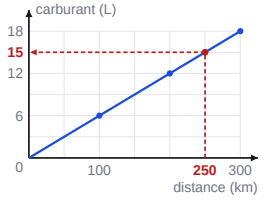


proportionnel — **non : pas par l'origine** — **non : pas une droite**

A : une droite qui passe par l'origine, la situation est proportionnelle. B : une droite qui ne passe pas par l'origine. C : une courbe, comme l'aire d'un carré en fonction de son côté.

RECONNAÎTRE LA PROPORTIONNALITÉ

1. **Dans un tableau**, diviser chaque nombre du bas par celui du haut. Tous les quotients égaux : c'est le coefficient. Un seul quotient différent, même dans la dernière colonne : pas de proportionnalité.
2. **Sur un graphique**, deux questions dans cet ordre : les points sont-ils **alignés** ? La droite passe-t-elle par l'**origine** $(0\,;\,0)$? Deux fois oui : proportionnalité, et le coefficient est le quotient $\frac{y}{x}$ d'un point bien lisible.



Pour 250 km, on monte jusqu'à la droite, puis on lit 15 L sur l'axe vertical.

EXEMPLE

Le graphique donne le carburant consommé par une voiture en fonction de la distance parcourue. La consommation est-elle proportionnelle à la distance ? Combien de litres pour 250 km ?

1. Les points sont alignés avec l'origine : c'est une situation de proportionnalité. Le point d'abscisse 300 a pour ordonnée 18 ; le coefficient est :
   $18 \div 300 = 0{,}06$
   0,06 L par kilomètre.
2. On lit 15 L pour 250 km, et le calcul le confirme :
   $250 \times 0{,}06 = 15$

la voiture consomme 15 L pour 250 km

PIÈGE

Conclure à la proportionnalité parce que les deux grandeurs augmentent ensemble. — la taille d'un enfant augmente avec son âge, mais elle ne double pas quand l'âge double. Il faut **multiplier par le même nombre**.

Ce que ça coûte : la conclusion, et toute la suite si l'on calcule avec un coefficient qui n'existe pas.

Le réflexe : calculer les quotients, ou chercher une colonne où l'une double sans que l'autre double.

PIÈGE

Conclure « proportionnel » dès que les points sont alignés. — un taxi avec prise en charge donne une droite qui coupe l'axe vertical au-dessus de l'origine : à 0 km, on paie déjà, et doubler la distance ne double pas le prix.

Ce que ça coûte : la conclusion, alors que la lecture était juste.

Le réflexe : deux questions, toujours dans cet ordre : alignés ? avec l'origine ?

PIÈGE

Croire que la droite passe par l'origine parce qu'elle part du coin du repère. — si un axe est gradué à partir de 10, par exemple, le coin n'est pas l'origine $(0\,;\,0)$.

Ce que ça coûte : la conclusion entière.

Le réflexe : lire les graduations du coin avant de conclure.

2 Calculer une quatrième proportionnelle

DÉFINITION

Trois nombres a, b et c étant connus, avec a non nul, la **quatrième proportionnelle** est le nombre d tel que le tableau de première ligne a, c et de seconde ligne b, d soit un tableau de proportionnalité.

PROPRIÉTÉ

Égalité des produits en croix (démontrée). Dans ce tableau, $a \times d = b \times c$, d'où $d = \dfrac{b \times c}{a}$. En effet, le coefficient vaut $k = \dfrac{b}{a}$, donc $d = k \times c = \dfrac{b \times c}{a}$; en multipliant par a, on obtient $a \times d = b \times c$.

TROIS PROCÉDURES, AU CHOIX

1. **Unité ou coefficient.** 6 m de câble pèsent 0,9 kg, donc 1 m pèse $0{,}9 \div 6 = 0{,}15$ kg : c'est aussi le coefficient qui fait passer de la longueur à la masse. Pour 15 m : $15 \times 0{,}15 = 2{,}25$
2. **Linéarité.** 15 m, c'est 6 m + 6 m + 3 m, et 3 m est la moitié de 6 m : $0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}45 = 2{,}25$
3. **Produit en croix.** On multiplie les deux nombres de la diagonale complète, puis on divise par le troisième : $\frac{15 \times 0{,}9}{6} = \frac{13{,}5}{6} = 2{,}25$

Longueur (m)	6	15
Masse (kg)	0,9	*x*

x = 15 × 0,9 ÷ 6 = 2,25

La diagonale verte est complète : on multiplie ses deux nombres, puis on divise par le nombre restant, en rouge.

EXEMPLE

Avec 250 g de farine, on fait 12 crêpes. Quelle masse de farine faut-il pour 30 crêpes ?

1. Par linéarité : 30 crêpes, c'est 2,5 fois 12 crêpes, car $2{,}5 \times 12 = 30$. On multiplie donc la farine par 2,5 : $250 \times 2{,}5 = 625$

   contrôle par le produit en croix : $\dfrac{30 \times 250}{12} = \dfrac{7\,500}{12} = 625.$

il faut 625 g de farine pour 30 crêpes

PIÈGE

6 m pèsent 0,9 kg ; 15 m, c'est 9 m de plus, donc « 0,9 + 9 = 9,9 kg ». — on a ajouté 9 à la masse parce qu'on avait ajouté 9 à la longueur. La proportionnalité **multiplie** ; on n'ajoute pas le même nombre aux deux lignes.

Ce que ça coûte : le résultat, et tous ceux qui en dépendent.

Le réflexe : estimer un ordre de grandeur : 15 m, c'est un peu plus du double de 6 m, donc un peu plus du double de 0,9 kg, environ 2 kg.

PIÈGE

Écrire $\dfrac{6 \times 0{,}9}{15} = 0{,}36$ kg pour 15 m de câble. — on a multiplié les deux nombres d'une même colonne. Le résultat est absurde : 15 m pèseraient moins que 6 m.

Ce que ça coûte : le résultat entier.

Le réflexe : placer l'inconnue dans le tableau, puis multiplier les deux nombres de **l'autre** diagonale, celle qui ne contient pas l'inconnue.

PIÈGE

Arrondir le coefficient en cours de calcul : 3 kg de cerises coûtent 7 €, « 1 kg coûte 2,30 €, donc 12 kg coûtent 27,60 € ». — $7 \div 3$ ne tombe pas juste : l'arrondi 2,30 fausse le résultat, qui vaut exactement $\dfrac{12 \times 7}{3} = 28$ €.

Ce que ça coûte : la précision, et parfois le résultat.

Le réflexe : garder la fraction, ou passer par le produit en croix, et n'arrondir qu'à la fin.

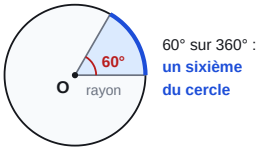
3 Une formule liant deux grandeurs

RÈGLE

Quand deux grandeurs sont liées par une formule $y = k \times x$, où k est un nombre fixé, elles sont proportionnelles et k est le coefficient. Ainsi : la **distance** parcourue à vitesse constante, $d = v \times t$; la **longueur d'un cercle**, $L = \pi \times D = 2 \times \pi \times r$; la **loi d'Ohm**, $U = R \times I$; la longueur d'un **arc de cercle** intercepté par un angle au centre de n degrés, $\ell = \dfrac{n}{360} \times L$.

Un arc de 60° sur un cercle de rayon 3 cm mesure donc $\dfrac{60}{360} \times 2 \times \pi \times 3 = \pi \approx 3{,}14$ cm.

Si l'inconnue est x, on **divise** y par k.



Un angle au centre de 60° fait un sixième du tour : l'arc est un sixième du cercle. La longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle.

EXEMPLE

Une résistance $R = 150\ \Omega$ est traversée par un courant d'intensité $I = 0{,}04$ A. Quelle est la tension à ses bornes ? Quelle intensité la traverserait sous une tension de 9 V ?

1. Loi d'Ohm, $U = R \times I$:
   $U = 150 \times 0{,}04 = 6$
2. Pour 9 V, l'inconnue est I : on divise la tension par la résistance.
   $I = 9 \div 150 = 0{,}06$

la tension vaut 6 V ; sous 9 V, l'intensité serait de 0,06 A

PIÈGE

Un train roule à 240 km/h pendant 1 h 15 min : écrire « 1 h 15 min = 1,15 h ». — une heure compte 60 minutes, pas 100 : 15 min font $\dfrac{15}{60} = 0{,}25$ h. Le train parcourt $240 \times 1{,}25 = 300$ km, et non $240 \times 1{,}15 = 276$ km.

Ce que ça coûte : le résultat, alors que la formule était juste.

Le réflexe : convertir les minutes en heures en divisant par 60, avant tout calcul.

4 Pourcentages, échelles et ratios

DÉFINITION

Prendre t % d'une quantité, c'est la multiplier par $\dfrac{t}{100}$: 18 % de 650 élèves, c'est $650 \times \dfrac{18}{100} = 117$ élèves. Inversement, une part d'un total en représente $\dfrac{\text{part}}{\text{total}} \times 100$ % : 182 élèves sur 650, c'est $\dfrac{182}{650} \times 100 = 28$ %. La part est proportionnelle au total, et t correspond à 100.

DÉFINITION

Sur un plan ou une carte, les longueurs sont proportionnelles aux longueurs réelles. L'**échelle** est le quotient $\dfrac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$, les deux longueurs étant **dans la même unité**. À l'échelle $\dfrac{1}{25\,000}$, 1 cm sur la carte représente 25 000 cm, soit 250 m, en réalité.

DÉFINITION

Deux nombres a et b sont **dans le ratio** $2 : 3$ lorsque $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3}$: a vaut 2 parts et b vaut 3 parts de même valeur. De même, trois nombres a, b et c sont dans le ratio $2 : 3 : 7$ lorsque les trois quotients $\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{b}{3}$ et $\dfrac{c}{7}$ sont égaux.



60 € partagés dans le ratio 2 : 3 : on compte 2 + 3 = 5 parts égales de 12 €.

EXEMPLE

Trois associés se partagent un bénéfice de 840 € dans le ratio 2 : 3 : 7.

1. On additionne les nombres du ratio pour compter les parts égales :
   $2 + 3 + 7 = 12$
2. On divise le total par le nombre de parts pour obtenir la valeur d'une part :
   $840 \div 12 = 70$
3. Les trois parts valent $2 \times 70 = 140$ €, $3 \times 70 = 210$ € et $7 \times 70 = 490$ €. Vérification :
   $140 + 210 + 490 = 840$

les associés reçoivent 140 €, 210 € et 490 €

PIÈGE

Un article à 40 € est soldé de 15 % : « je paie 40 − 15 = 25 € ». — 15 % n'est pas 15 € : c'est 15 centièmes du prix, soit $40 \times \frac{15}{100} = 6$ €. Le prix soldé est $40 - 6 = 34$ €.

Ce que ça coûte : le résultat de la question.

Le réflexe : calculer d'abord le montant de la remise, puis le soustraire.

PIÈGE

Échelle $\frac{1}{25\,000}$, 6 cm sur la carte : « 6 × 25 000 = 150 000, donc 150 km ». — 150 000 est en **centimètres**, l'unité de la mesure sur la carte : 150 000 cm = 1 500 m = 1,5 km.

Ce que ça coûte : le résultat, à un facteur 100 près.

Le réflexe : écrire l'unité à chaque ligne, convertir à la fin, et contrôler : 6 cm de carte de randonnée ne couvrent pas 150 km.

PIÈGE

Partager 60 € dans le ratio 2 : 3 en donnant au premier les $\frac{2}{3}$ de 60 €, soit 40 €. — ses 2 parts sont 2 parts sur **5**, pas sur 3 : il reçoit les $\frac{2}{5}$ de 60 €, soit 24 €.

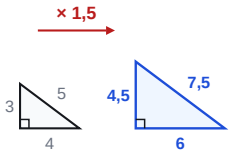
Ce que ça coûte : les deux parts, toutes deux fausses.

Le réflexe : additionner d'abord les nombres du ratio : c'est le nombre total de parts.

5 La proportionnalité en géométrie

PROPRIÉTÉ

Dans un **agrandissement** ou une **réduction** de rapport k, toutes les longueurs sont multipliées par k : elles sont **proportionnelles** aux longueurs de départ, de coefficient k ($k > 1$ pour un agrandissement, $0 < k < 1$ pour une réduction). Les angles sont conservés. Les **aires** sont multipliées par k^2 et les **volumes** par k^3 : ni les aires ni les volumes ne sont proportionnels aux longueurs. Ces propriétés sont admises. Le **théorème de Thalès** le dit aussi : si M est sur $[AB]$, N sur $[AC]$ et (MN) parallèle à (BC), alors ABC est un agrandissement de AMN et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Longueurs en centimètres. Rapport 1,5 : chaque côté est multiplié par 1,5, les angles ne changent pas.

EXEMPLE

Le triangle rectangle de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm est agrandi avec le rapport 1,5. Quelles sont les longueurs et l'aire du triangle agrandi ?

(1) Les longueurs sont multipliées par 1,5 : $3 \times 1{,}5 = 4{,}5$ cm, $4 \times 1{,}5 = 6$ cm et $5 \times 1{,}5 = 7{,}5$ cm. L'aire de départ vaut $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm² ; l'aire agrandie : $\frac{4{,}5 \times 6}{2} = 13{,}5$

on retrouve $6 \times 1{,}5^2 = 6 \times 2{,}25 = 13{,}5$: l'aire est multipliée par k^2, pas par k.

côtés de 4,5 cm, 6 cm et 7,5 cm ; aire de 13,5 cm², et non de 9 cm²

PIÈGE

Multiplier l'aire par k dans un agrandissement de rapport k. — une aire est le produit de deux longueurs, chacune multipliée par k : l'aire est multipliée par $k \times k = k^2$. Avec $k = 2$, elle est multipliée par 4, pas par 2.

Ce que ça coûte : le résultat de la question d'aire.

Le réflexe : pour une aire, multiplier par k^2, pour un volume par k^3 ; ou recalculer avec les nouvelles longueurs.

À VÉRIFIER

- Ai-je testé **toutes** les colonnes, ou vérifié que les points sont **alignés avec l'origine** ?
- Produit en croix : ai-je multiplié les deux nombres de la diagonale **sans** l'inconnue ?
- Durées en heures décimales (15 min = 0,25 h) ? Échelle : **même unité** ?
- Ratio : ai-je compté le **nombre total de parts** ? Une phrase de conclusion, avec l'unité ?
- Agrandissement de rapport k : longueurs × k, aires × k^2, volumes × k^3 ?

À RETENIR

- **Proportionnalité** : on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant toujours par le même nombre k, le **coefficient**.
- Sur un graphique : des points **alignés avec l'origine**. Une droite qui n'y passe pas ne suffit pas.
- **Quatrième proportionnelle** : unité, coefficient, linéarité ou produit en croix $d = b \times c \div a$, au choix.
- $d = v \times t$, $U = R \times I$, $L = \pi \times D$: des formules de proportionnalité.
- t % de Q : $Q \times t \div 100$. Échelle : même unité. Ratio $2 : 3$: $2 + 3 = 5$ parts.
- Agrandissement de rapport k : longueurs × k, aires × k^2, volumes × k^3.