COURS

4e

Puissances de 10 — Notation scientifique, racine carrée

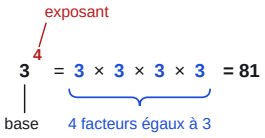
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Un atome mesure environ 0,000 000 000 1 m, la Lune est à environ 384 000 000 m de la Terre : écrits ainsi, ces nombres se lisent mal. Les puissances de 10 comptent les zéros à notre place ; la racine carrée défait ce que fait le carré. **10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros, 10^{-n} place le 1 au n-ième rang après la virgule ; $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a.**

1 Les puissances d'un nombre

DÉFINITION

Soit a un nombre et n un entier supérieur ou égal à 2. La **puissance n-ième** de a, notée a^n et lue « a exposant n », est le **produit de n facteurs égaux à a** : $a^n = a \times a \times \cdots \times a$. Le nombre a est la **base**, n l'**exposant**. Par convention, $a^1 = a$. Rappel de 5e : a^2 se lit « a au carré » et a^3 « a au cube ».



L'exposant compte les facteurs.

SIMPLIFIER L'ÉCRITURE D'UN PRODUIT

1. Repérer les facteurs égaux et les **compter**.
2. Écrire la base, puis le nombre de facteurs en exposant : $6 \times 6 \times 6 = 6^3$; avec deux bases, chacune à part : $2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^3$.
3. Pour un produit de puissances d'une même base, revenir à la définition et compter : $5^2 \times 5^3 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5)$, soit 5 facteurs ; aucune formule n'est à apprendre.
   $5^2 \times 5^3 = 5^5 = 3\,125$

EXEMPLE

Calculer $(-2)^3$, $(-2)^4$ et -2^4.

1. Trois facteurs négatifs, un nombre impair : le produit est négatif (règle des signes).
   $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
2. Quatre facteurs négatifs, un nombre pair : le produit est positif.
   $(-2)^4 = 16$
3. Sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur 2 : -2^4 est l'opposé de 2^4.
   $-2^4 = -16$

$\underline{(-2)^3 = -8\,;\, (-2)^4 = 16\,;\, -2^4 = -16.}$

PIÈGE

Écrire $3^4 = 12$, ou $-5^2 = 25$. — $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$; 12, c'est 3×4. Et sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur 5 : $-5^2 = -25$, c'est $(-5)^2$ qui vaut 25.

Ce que ça coûte : le résultat, et tous les calculs qui en dépendent.

Le réflexe : réécrire le produit en entier, et regarder si le signe moins est **dans** la parenthèse qui porte l'exposant.

2 Les puissances de 10

DÉFINITION

Pour un entier n positif, 10^n s'écrit avec un **1 suivi de n zéros** : $10^4 = 10\,000$. On convient que $10^0 = 1$. La puissance 10^{-n} est l'**inverse** de 10^n, c'est-à-dire $\frac{1}{10^n}$: en écriture décimale, le chiffre 1 est au **n-ième rang après la virgule**. Ainsi $10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$, un millième.

RÈGLE

Multiplier un nombre par 10^n (n entier positif), c'est le multiplier n fois de suite par 10 : **la virgule se déplace de n rangs vers la droite**. Multiplier par 10^{-n}, c'est diviser par 10^n : **la virgule se déplace de n rangs vers la gauche**. Ces deux règles découlent directement de la définition.

EXEMPLE

Calculer $3{,}2 \times 10^4$ et 45×10^{-3}, puis écrire $10^5 \times 10^{-2}$ comme une seule puissance de 10.

1. La virgule avance de 4 rangs ; on complète par des zéros.
   $3{,}2 \times 10^4 = 32\,000$
2. La virgule recule de 3 rangs.
   $45 \times 10^{-3} = 0{,}045$
3. On revient aux écritures décimales, sans formule à apprendre.
   $10^5 \times 10^{-2} = 100\,000 \times 0{,}01 = 1\,000 = 10^3$

$\underline{32\,000\ ;\ 0{,}045\ ;\ 10^3.}$

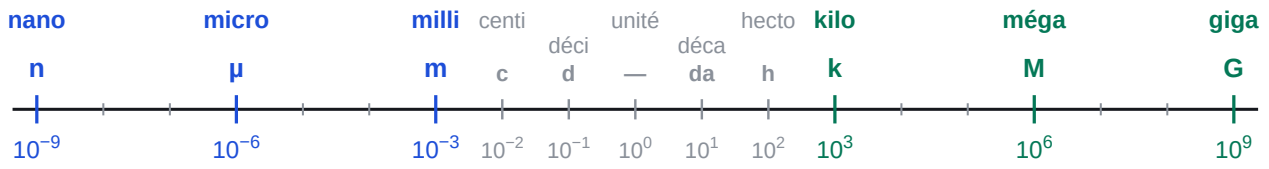
puissance	décimal	fraction
10^3	1 000	—
10^2	100	—
10^1	10	—
10^0	1	—
10^{-1}	0,1	1/10
10^{-2}	0,01	1/100
10^{-3}	0,001	1/1 000

une ligne plus haut : × 10

Une puissance de 10 d'exposant négatif est positive et plus petite que 1.

RÈGLE

Les **préfixes** remplacent une puissance de 10 devant une unité (mètre, gramme, litre, watt, seconde…) : **nano** (n, 10^{-9}), **micro** (µ, 10^{-6}), **milli** (m, 10^{-3}), **kilo** (k, 10^3), **méga** (M, 10^6), **giga** (G, 10^9), et entre milli et kilo, centi, déci, déca et hecto. Ainsi 1 µm $= 10^{-6}$ m et 1 GW $= 10^9$ W.



De nano à giga, chaque préfixe correspond à une puissance de 10. Au-delà de milli et de kilo, ils vont de mille en mille.

CONVERTIR AVEC UN PRÉFIXE

1. Remplacer le préfixe par sa puissance de 10, puis déplacer la virgule si l'on veut une écriture décimale : 250 mg $= 250 \times 10^{-3}$ g.
   $250 \times 10^{-3} = 0{,}25$
2. En sens inverse, faire apparaître la puissance de 10 d'un préfixe : $0{,}004$ s $= 4 \times 10^{-3}$ s $= 4$ ms.

PIÈGE

Écrire $10^{-3} = -1\,000$, ou $10^{-3} = 0{,}0001$. — le signe moins de l'exposant indique un **inverse**, pas un nombre négatif : $10^{-3} = 0{,}001$. Et $0{,}001$ compte trois zéros en tout, celui des unités compris ; $0{,}0001$, c'est 10^{-4}.

Ce que ça coûte : un facteur 10, ou le signe : toutes les conversions qui suivent sont fausses.

Le réflexe : lire 10^{-3} « un millième » : le 1 est au 3e rang après la virgule.

PIÈGE

Lire 5 Mm comme 5 millimètres. — **m** minuscule est milli (10^{-3}), **M** majuscule est méga (10^6) : un facteur d'un milliard les sépare. Et µ (micro) n'est pas un m.

Ce que ça coûte : une conversion fausse d'un facteur gigantesque, et un résultat absurde.

Le réflexe : relire chaque symbole lettre par lettre, majuscule comprise.

3 La notation scientifique

DÉFINITION

Tout nombre décimal positif s'écrit d'une seule façon sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule** ($1 \leq a < 10$) et n un entier positif, négatif ou nul (résultat admis). C'est sa **notation scientifique**. Pour un nombre négatif, on place le signe devant : $-2{,}5 \times 10^3$.

ÉCRIRE UN NOMBRE EN NOTATION SCIENTIFIQUE

1. Placer la virgule juste après le **premier chiffre non nul** : c'est a.
2. Compter de combien de rangs la virgule s'est déplacée : c'est n, sans son signe.
3. Choisir le signe : pour un nombre supérieur ou égal à 10, la virgule a reculé et n est **positif** ; pour un nombre plus petit que 1, elle a avancé et n est **négatif** ; entre 1 et 10, $n = 0$. Contrôler en refaisant le chemin inverse.

EXEMPLE

Écrire $52\,000\,000$ et $0{,}000\,36$ en notation scientifique, puis donner une écriture fractionnaire de $0{,}000\,36$.

1. La virgule recule de 7 rangs pour se placer après le 5.
   $52\,000\,000 = 5{,}2 \times 10^{7}$
2. La virgule avance de 4 rangs pour se placer après le 3.
   $0{,}000\,36 = 3{,}6 \times 10^{-4}$
3. Le dernier chiffre, 6, est au rang des cent-millièmes.
   $0{,}000\,36 = \frac{36}{100\,000}$

$5{,}2 \times 10^{7}\ ;\ 0{,}000\,36 = \dfrac{36}{100\,000} = 3{,}6 \times 10^{-4}.$

7 rangs vers la gauche

5 , 2 0 0 0 0 0 0 ,

= 5,2 × 10^{7}

4 rangs vers la droite

0 , 0 0 0 3 , 6

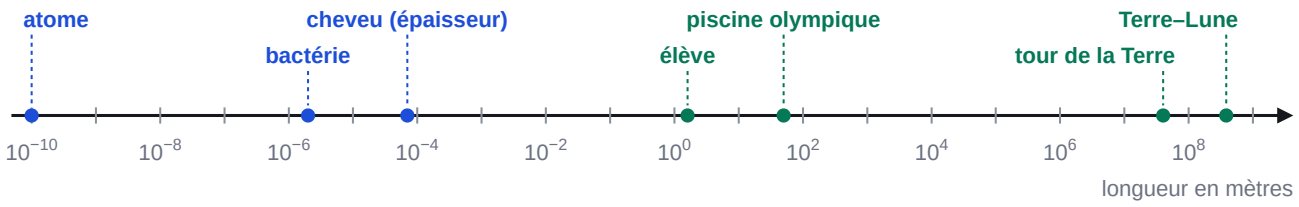
= 3,6 × 10^{-4}

Grand nombre : exposant positif. Nombre plus petit que 1 : exposant négatif.

La calculatrice affiche parfois `5.2E7` : le E se lit « fois 10 puissance », et l'on écrit $5{,}2 \times 10^{7}$.

COMPARER DEUX NOMBRES EN NOTATION SCIENTIFIQUE

1. Écrire les deux nombres en notation scientifique, s'ils ne le sont pas déjà.
2. Comparer d'abord les **exposants** : le plus grand exposant donne le plus grand nombre. Ainsi $4{,}1 \times 10^{-5} > 9{,}8 \times 10^{-6}$, car $-5 > -6$, même si $4{,}1 < 9{,}8$.
3. Seulement si les exposants sont égaux, comparer les nombres a : $3{,}2 \times 10^{8} < 7{,}5 \times 10^{8}$.



Chaque graduation multiplie la longueur par 10. La distance Terre-Lune vaut plus d'un milliard de milliards de fois la taille d'un atome.

EXEMPLE

La Lune est à environ 384 000 km de la Terre. Combien de piscines olympiques de 50 m faudrait-il aligner pour couvrir cette distance ? Vérifier par un ordre de grandeur.

1. En mètres : $384\,000$ km $= 384\,000\,000$ m $= 3{,}84 \times 10^{8}$ m. On divise par 50 m.
   $384\,000\,000 \div 50 = 7\,680\,000$
2. Ordre de grandeur : avec 400 000 000 m, on trouve un nombre proche, qui a autant de chiffres.
   $400\,000\,000 \div 50 = 8\,000\,000$
   le résultat est vraisemblable.

il faudrait environ $7\,680\,000$ piscines, soit $7{,}68 \times 10^{6}$.

PIÈGE

Donner 45×10^{3} ou $0{,}45 \times 10^{5}$ comme notation scientifique de $45\,000$. — ces écritures valent bien 45 000, mais le nombre devant la puissance de 10 doit avoir **un seul chiffre non nul avant la virgule** : c'est $4{,}5 \times 10^{4}$.

Ce que ça coûte : la question, même si l'égalité écrite est juste.

Le réflexe : vérifier que $1 \leq a < 10$.

4 Carrés parfaits et racine carrée

DÉFINITION

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier. Les douze premiers, de 1 à 144, se connaissent par cœur : ils servent à calculer des racines carrées de tête et à les encadrer.

$1^2 = 1$	$5^2 = 25$	$9^2 = 81$
$2^2 = 4$	$6^2 = 36$	$10^2 = 100$
$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$11^2 = 121$
$4^2 = 16$	$8^2 = 64$	$12^2 = 144$

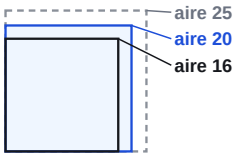
Les carrés parfaits de 1 à 144.

DÉFINITION

Soit a un nombre **positif**. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre **positif** dont le carré est égal à a ; on admet qu'il existe. Ainsi $\sqrt{144} = 12$, car $12 \geq 0$ et $12^2 = 144$; $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$; $\sqrt{0} = 0$. Pour tout $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$. Un nombre négatif n'a **pas** de racine carrée : un carré n'est jamais négatif.

ENCADRER UNE RACINE CARRÉE ENTRE DEUX ENTIERS

1. Chercher les **deux carrés parfaits consécutifs** qui entourent le nombre : $16 < 20 < 25$.
2. Prendre les racines carrées : $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$. On admet en effet que deux nombres positifs sont rangés dans le **même ordre** que leurs racines carrées : si $0 \leq a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
3. Conclure : $4 < \sqrt{20} < 5$. Aucune calculatrice n'est nécessaire.



côtés : 4 < √20 < 5

Le carré d'aire 20 est entre ceux d'aires 16 et 25.

UNE VALEUR APPROCHÉE À LA CALCULATRICE

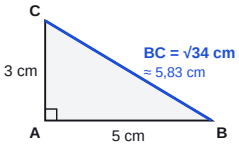
1. Taper la touche racine carrée, puis le nombre : pour 20, l'écran affiche 4,472135955. Arrondir d'après le chiffre suivant : au centième, le chiffre des millièmes est 2, inférieur à 5, on garde 4,47.
2. Écrire ≈, jamais = : $\sqrt{20} \approx 4{,}47$. Contrôler avec l'encadrement : 4,47 est bien entre 4 et 5.

EXEMPLE

ABC est rectangle en A, avec $AB = 5$ cm et $AC = 3$ cm. Donner la valeur exacte de BC, puis une valeur approchée au centième.

1. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABC rectangle en A : $BC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$
2. BC est une longueur, donc positive, et son carré vaut 34 : $BC = \sqrt{34}$ cm, la valeur exacte.
3. $25 < 34 < 36$, donc $5 < \sqrt{34} < 6$; la calculatrice affiche 5,830951895. $\sqrt{34} \approx 5{,}83$

$BC = \sqrt{34}$ cm, soit environ 5,83 cm.



La valeur exacte s'écrit avec la racine ; la valeur approchée, avec ≈.

Même réflexe pour un agrandissement : les aires y sont multipliées par le carré du rapport des longueurs. Si une aire est multipliée par 9, les longueurs le sont donc par $\sqrt{9} = 3$, et non par 9.

PIÈGE

Écrire $\sqrt{36} = 18$, ou $\sqrt{9} = -3$. — une racine n'est pas une moitié : $18^2 = 324$. Et $\sqrt{9} = 3$, positif, même si $(-3)^2 = 9$.

Ce que ça coûte : la longueur cherchée, et la suite du problème.

Le réflexe : élever le résultat au carré pour retrouver le nombre.

PIÈGE

Écrire $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. — $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. C'est l'erreur qui guette la dernière ligne d'un calcul de Pythagore.

Ce que ça coûte : la longueur de l'hypoténuse, donc la réponse.

Le réflexe : calculer d'abord sous la racine, puis prendre la racine.

PIÈGE

Écrire $\sqrt{20} = 4{,}47$, ou arrondir en cours de calcul. — $4{,}47^2 = 19{,}980\,9$, pas 20. Arrondir tôt fausse la suite : $4 \times \sqrt{20} \approx 17{,}89$, mais $4 \times 4{,}47 = 17{,}88$.

Ce que ça coûte : le point de rédaction, parfois le dernier chiffre.

Le réflexe : écrire ≈ et n'arrondir qu'à la dernière ligne.

À VÉRIFIER

- L'exposant compte-t-il des **facteurs** ? $3^4 = 81$, pas 12.
- 10^{-n} : le 1 est-il au n-**ième rang** après la virgule ? Le nombre est-il positif ?
- Notation scientifique : **un seul chiffre non nul** avant la virgule ?
- Pour comparer : les **exposants d'abord**, puis a ?
- La racine carrée est-elle **positive**, et son carré redonne-t-il le nombre ?
- Valeur approchée : symbole **≈**, et arrondi seulement à la fin ?

À RETENIR

- a^n est le produit de n facteurs égaux à a : $3^4 = 81$, et $(-5)^2 = 25$ mais $-5^2 = -25$.
- 10^n : un 1 suivi de n zéros. $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$: le 1 au n-ième rang après la virgule, un nombre positif.
- Préfixes : nano 10^{-9}, micro 10^{-6}, milli 10^{-3}, kilo 10^3, méga 10^6, giga 10^9.
- Notation scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$. Pour comparer, les exposants d'abord.
- Carrés parfaits : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.
- $\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ est le nombre positif dont le carré vaut a. Encadrer avec deux carrés parfaits ; valeur approchée avec ≈, arrondie à la fin.