COURS

4e

Pyramides et cônes — Volumes et repérage dans l'espace

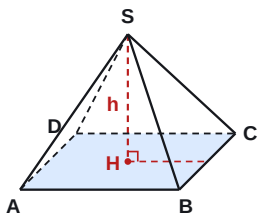
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Un cône n'est rien d'autre qu'une pyramide à base ronde : les deux finissent en pointe, et se calculent de la même façon. **Le volume d'une pyramide ou d'un cône est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur : $V = \frac{B \times h}{3}$.** Pour les dessiner, on reprend la perspective cavalière et les patrons de 5e ; pour se repérer dans l'espace, trois nombres suffisent : l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude.

1 Reconnaître une pyramide et un cône

DÉFINITION

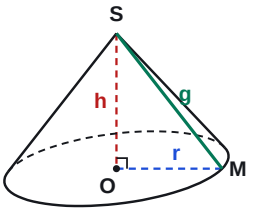
Une **pyramide** est un solide dont une face, la **base**, est un polygone, et dont toutes les autres faces, les **faces latérales**, sont des triangles qui ont un sommet commun : le **sommet** de la pyramide. Les côtés de ces triangles issus du sommet sont les **arêtes latérales**. La **hauteur** est le segment issu du sommet et perpendiculaire au plan de la base, ou sa longueur. Une base à n côtés donne $n + 1$ faces, $2n$ arêtes et $n + 1$ sommets.



Base en bleu, hauteur $[SH]$ en rouge ; ici, son pied H est le centre de la base.

DÉFINITION

Un **cône de révolution** est le solide engendré par un triangle rectangle qui tourne autour d'un des côtés de son angle droit. Sa **base** est un disque de centre O et de rayon r ; son **sommet** S est sur la perpendiculaire à la base en O, et SO est sa **hauteur** h. Les segments qui joignent S au cercle de base sont les **génératrices** : elles ont toutes la même longueur g.



Hauteur h en rouge, rayon r en bleu, génératrice g en vert.

PROPRIÉTÉ

Si M est un point du cercle de base, le triangle SOM est **rectangle en O**, puisque la hauteur est perpendiculaire à la base. Le théorème de Pythagore relie donc la génératrice, la hauteur et le rayon : $g^2 = h^2 + r^2$.

EXEMPLE

Un cône de révolution a pour rayon 5 cm et pour génératrice 13 cm. Calculer sa hauteur.

1. Le triangle SOM est rectangle en O, d'hypoténuse la génératrice $[SM]$. D'après le théorème de Pythagore :
   $h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$
   or $12^2 = 144$, donc h = 12 cm.

la hauteur mesure 12 cm, moins que la génératrice

PIÈGE

Prendre une arête latérale ou une génératrice pour la hauteur. — la hauteur est **perpendiculaire** à la base ; une génératrice, inclinée, est plus longue : 13 cm au lieu de 12 cm.

Ce que ça coûte : le volume entier, faux dès la première ligne.

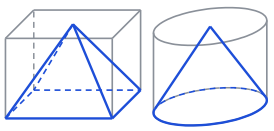
Le réflexe : chercher l'angle droit au pied de la hauteur ; sinon, la calculer avec le théorème de Pythagore.

2 Le volume d'une pyramide, d'un cône

PROPRIÉTÉ

Volume d'une pyramide, d'un cône. B est l'aire de la base et h la hauteur, dans des unités qui vont ensemble (cm² et cm, ou m² et m). La base d'un cône de rayon r est un disque d'aire $\pi \times r^2$, d'où la seconde formule.

$$V = \frac{B \times h}{3} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$



Le tiers du pavé, le tiers du cylindre : même base, même hauteur.

Ces formules sont **admises** au collège : trois pyramides pleines d'eau remplissent le prisme droit de même base et de même hauteur. Un cube d'arête a se découpe d'ailleurs en trois pyramides identiques de base une face et de hauteur a : chacune vaut le tiers de a^3.

CALCULER LE VOLUME D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CÔNE

1. **Repérer la base et la hauteur**, perpendiculaire à la base, et mettre les longueurs dans la même unité.
2. **Calculer l'aire B de la base** : carré $c \times c$, rectangle $L \times \ell$, triangle $b \times h' \div 2$ (avec la hauteur h' du triangle), disque $\pi \times r^2$.
3. **Multiplier par la hauteur, diviser par 3, conclure avec une unité de volume.** Pour un cône, garder π jusqu'au bout : valeur exacte d'abord, comme 100π cm³, puis arrondi. Rappel : 1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³.

EXEMPLE

Une pyramide a pour base un rectangle de 6 cm sur 5 cm et pour hauteur 8 cm. Calculer son volume.

1. La base a pour aire $6 \times 5 = 30$ cm². Volume, en cm³ :
   $V = \frac{30 \times 8}{3} = \frac{240}{3} = 80$

le volume de la pyramide est 80 cm³

EXEMPLE

Calculer le volume du cône de rayon 5 cm et de hauteur 12 cm, en valeur exacte, puis arrondi au cm³.

1. La base a pour aire $\pi \times 5^2 = 25\pi$ cm². On multiplie par 12 et on divise par 3, le facteur π restant à part :
   $\frac{25 \times 12}{3} = \frac{300}{3} = 100$
   donc V = 100π cm³ ; la calculatrice donne 100π ≈ 314,16.

V = 100π cm³, soit environ 314 cm³

PIÈGE

Oublier de diviser par 3. — on calcule le volume du prisme ou du cylindre de même base et de même hauteur : **trois fois** trop.

Ce que ça coûte : le résultat, et les questions qui s'en servent.

Le réflexe : le volume doit être plus petit que $B \times h$.

PIÈGE

Mettre le diamètre au carré à la place du rayon. — pour 10 cm de diamètre, $r^2 = 25$; avec 10, on trouve 100 : un volume **quatre fois** trop grand.

Ce que ça coûte : le résultat, alors que la formule était juste.

Le réflexe : écrire « $r = \ldots$ cm » avant la formule.

PIÈGE

Confondre la hauteur du triangle de base et celle de la pyramide. — base de côté 6 cm et de hauteur 4 cm, pyramide de hauteur 10 cm : $B = 12$ cm², puis $V = 40$ cm³.

Ce que ça coûte : l'aire de la base, donc le volume.

Le réflexe : nommer h' la hauteur du triangle, h celle de la pyramide.

3 Représenter : perspective cavalière et patrons

RÈGLE

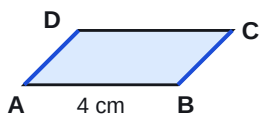
Rappel de 5e : la perspective cavalière. Les faces parallèles à la feuille sont **en vraie grandeur**. Les arêtes **fuyantes**, perpendiculaires à la feuille, sont parallèles entre elles, inclinées d'un même angle et réduites d'un même coefficient (ici 45° et 0,5). Les arêtes **cachées** sont en pointillés. Le dessin conserve le parallélisme et les milieux. Un logiciel de géométrie dynamique permet aussi de faire tourner un solide à l'écran.

DESSINER UNE PYRAMIDE À BASE CARRÉE EN PERSPECTIVE

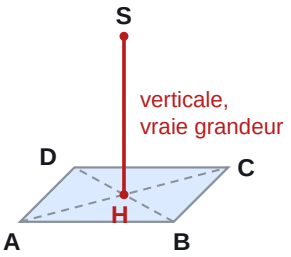
1. **La base** : le côté avant $[AB]$ en vraie grandeur ; les côtés fuyants $[AD]$ et $[BC]$ à 45°, réduits de moitié. Le carré devient un **parallélogramme**.
2. **Le centre** H de la base, à l'intersection des diagonales : la perspective conserve les milieux.
3. **La hauteur** $[SH]$, verticale et **en vraie grandeur**, car parallèle à la feuille. Puis **les arêtes latérales** : $[AD]$, $[DC]$ et $[SD]$ sont cachées, en pointillés.

1. la base : un parallélogramme

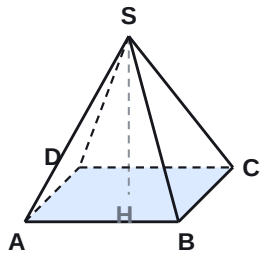
fuyantes [AD] et [BC] : 45°, réduites de moitié



2. le centre H, puis la hauteur



3. les arêtes, cachées en pointillés



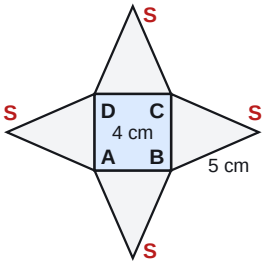
La pyramide $SABCD$: base carrée de 4 cm, arêtes latérales de 5 cm, hauteur d'environ 4,1 cm.

DESSINER UN CÔNE DE RÉVOLUTION EN PERSPECTIVE

1. Le cercle de base, vu de biais, devient un **ovale** ; la hauteur $[SO]$ est verticale, en vraie grandeur.
2. Les bords du cône : les deux génératrices issues de S qui **touchent** l'ovale. Entre ces points, l'arrière de l'ovale est en pointillés.

CONSTRUIRE LE PATRON D'UNE PYRAMIDE

1. Un **patron** se plie pour recouvrir toutes les faces, sans trou ni chevauchement : tout y est **en vraie grandeur**. Tracer la base, ici un carré de 4 cm.
2. Sur chaque côté, on construit la face latérale au compas : pour $[AB]$, deux arcs de rayon 5 cm centrés en A et en B se coupent hors du carré.
3. Deux bords qui se recollent ont la même longueur ; les quatre pointes se rejoignent en S.

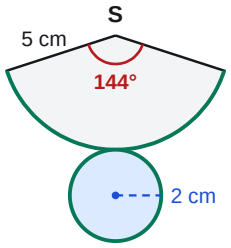


Le patron de la pyramide $SABCD$.

PROPRIÉTÉ

Le **patron d'un cône de révolution** de rayon r et de génératrice g est formé d'un **disque** de rayon r et d'un **secteur de disque** de rayon g, dont l'arc s'enroule sur le cercle de base : il mesure $2 \times \pi \times r$. La longueur d'un arc est proportionnelle à son angle, et le cercle entier de rayon g, de longueur $2 \times \pi \times g$, correspond à 360° ; l'angle du secteur, en degrés, est donc :

$$\alpha = 360 \times \frac{r}{g}$$



Rayon 2 cm, génératrice 5 cm : l'arc vert a la longueur du cercle vert.

EXEMPLE

Construire le patron d'un cône de révolution de rayon 2 cm et de génératrice 5 cm.

1. L'angle du secteur, en degrés :
$360 \times \frac{2}{5} = \frac{720}{5} = 144$
contrôle : l'arc vaut 2/5 du cercle de rayon 5 cm, soit 2/5 × 10π = 4π cm, le périmètre de la base.

au rapporteur, un secteur de rayon 5 cm et d'angle 144°, puis un disque de rayon 2 cm qui touche l'arc en son milieu

EXEMPLE

Mettre en relation la perspective et le patron de la pyramide $SABCD$ (base carrée de 4 cm, arêtes latérales de 5 cm) : quelles longueurs sont en vraie grandeur, et combien mesure la hauteur SH ?

1. **En perspective**, seuls $[AB]$, $[DC]$ et $[SH]$ sont en vraie grandeur. **Sur le patron**, tout l'est, mais SH n'y figure pas : on la calcule.
2. Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$
H est le milieu de [AC], donc HA² = 32 ÷ 4 = 8.
3. Le triangle SHA est rectangle en H :
$SH^2 = 5^2 - 8 = 25 - 8 = 17$
SH ≈ 4,1 cm, avec la touche racine carrée de la calculatrice.

SH ≈ 4,1 cm : c'est la longueur à dessiner verticalement

PIÈGE

Mesurer une longueur sur le dessin en perspective. — sur le dessin, $[SA]$ et $[SB]$ semblent différentes ; elles mesurent pourtant toutes deux 5 cm.

Ce que ça coûte : une longueur fausse, et le volume avec elle.

Le réflexe : lire les longueurs dans l'énoncé ou sur le patron.

PIÈGE

Prendre la hauteur pour rayon du secteur d'un patron de cône. — au pliage, ce rayon devient une génératrice : c'est g, pas h. Le patron ne se referme pas.

Ce que ça coûte : le patron entier.

Le réflexe : si l'énoncé donne r et h, calculer d'abord g avec le théorème de Pythagore.

PIÈGE

Tracer en traits pleins les arêtes cachées. — on ne sait plus si D est devant ou derrière : la pyramide se lit de deux façons.

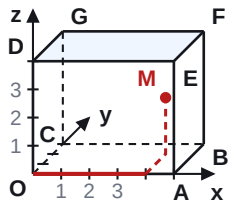
Ce que ça coûte : le point de la représentation.

Le réflexe : pour chaque arête, se demander si une face la cache.

4 Se repérer dans un pavé droit

DÉFINITION

On choisit un sommet O d'un pavé droit et les trois arêtes qui en partent, perpendiculaires deux à deux : elles portent l'axe des **abscisses**, celui des **ordonnées** et celui des **altitudes**, gradués avec la même unité. Tout point M est repéré par trois **coordonnées**, toujours dans cet ordre : $M(x\,;y\,;z)$, où x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z l'**altitude**. L'origine est $O(0\,;0\,;0)$.



Le trajet rouge mène de O à $M(4\,;2\,;2)$.

LIRE OU PLACER UN POINT PAR SON TRAJET

1. Partir de O et avancer **parallèlement à l'axe des abscisses** : pour M, 4 unités, c'est l'abscisse.
2. Puis **parallèlement à l'axe des ordonnées** : 2 unités, l'ordonnée ; sur cet axe fuyant, on compte les graduations. Enfin **verticalement** : 2 unités, l'altitude. Pour placer un point, même trajet, même ordre.

EXEMPLE

Le pavé $OABCDEFG$ de la figure mesure 5, 3 et 4 unités selon les trois axes. Coordonnées de B, E, F et du centre K de la face du dessus $DEFG$?

1. B est au bout de $[OA]$ puis de $[AB]$, à l'altitude 0 ; E et F sont au-dessus de A et de B, à l'altitude 4. K, milieu de la diagonale $[DF]$, est à mi-chemin selon les abscisses et les ordonnées :
   $5 \div 2 = 2{,}5$
   et 3 ÷ 2 = 1,5.

B(5 ; 3 ; 0), E(5 ; 0 ; 4), F(5 ; 3 ; 4) et K(2,5 ; 1,5 ; 4)

PIÈGE

Inverser l'ordre : écrire $(2\,;4\,;2)$ pour le point M. — $(4\,;2\,;2)$ et $(2\,;4\,;2)$ sont deux points différents.

Ce que ça coûte : le point, et ce qui en dépend.

Le réflexe : repérer le nom de chaque axe avant de lire.

PIÈGE

Lire à l'œil un point isolé au milieu du pavé. — un point du dessin représente toute une ligne de points de l'espace, devant ou derrière.

Ce que ça coûte : une ou deux coordonnées fausses.

Le réflexe : s'appuyer sur les arêtes, une face connue ou un trajet.

PIÈGE

Mesurer l'ordonnée à la règle sur l'axe fuyant. — une unité de 1 cm sur les axes de face fait 0,5 cm sur la fuyante : 1 cm y vaut 2 unités.

Ce que ça coûte : une ordonnée fausse du simple au double.

Le réflexe : compter les graduations.

À VÉRIFIER

- La **hauteur**, pas une arête ; le **rayon**, pas le diamètre ?
- **Divisé par 3**, mêmes unités, conclusion en cm³ ou L ?
- Fuyantes à 45°, réduites de moitié ; arêtes cachées en pointillés ?
- Patron en vraie grandeur ; secteur de rayon g pour un cône ?
- Coordonnées dans l'ordre **abscisse, ordonnée, altitude** ?

À RETENIR

- **Pyramide ou cône** : $V = \frac{B \times h}{3}$; pour un cône, $B = \pi \times r^2$.
- **Hauteur** perpendiculaire à la base ; dans un cône, $g^2 = h^2 + r^2$.
- Patron en vraie grandeur ; cône : secteur de rayon g, d'angle $360 \times \frac{r}{g}$.
- $M(x\,;y\,;z)$: **abscisse, ordonnée, altitude**.