

COURS

Théorème de Pythagore — Applications et réciproque

4^e

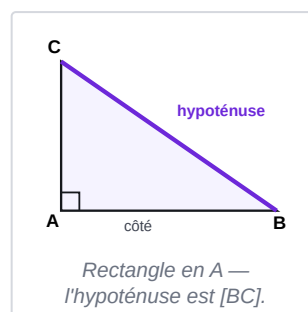
Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

Mesurer une longueur suppose d'ordinaire de pouvoir l'atteindre. Le théorème de Pythagore est le premier outil qui s'en affranchit : il permet de **calculer une longueur qu'on ne peut pas mesurer** — la hauteur d'un mur, la largeur d'une rivière, la diagonale d'un terrain — à partir de deux longueurs connues. Il ne fonctionne que dans un triangle rectangle, et c'est sa seule limite.

1 Le vocabulaire du triangle rectangle

DÉFINITION

Dans un triangle rectangle, le côté **opposé à l'angle droit** s'appelle l'**hypoténuse**. Les deux autres sont les **côtés de l'angle droit**. L'hypoténuse est toujours le plus long des trois : si un côté n'est pas le plus long, ce n'est pas l'hypoténuse.



2 Le théorème

PROPRIÉTÉ

Si le triangle ABC est rectangle en A , alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

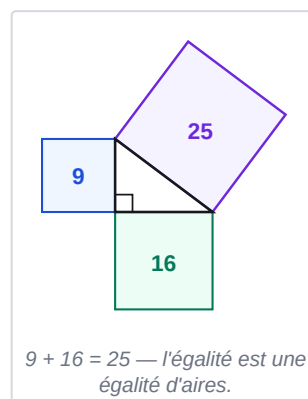
3 La démonstration par les aires

EXEMPLE

Le mot « carré » n'est pas une image : il s'agit de l'aire d'un carré. Sur un triangle de côtés 3 et 4, construis un carré sur chaque côté.

- ① Carré sur le premier côté
 $3 \times 3 = 9$
- ② Carré sur le second côté
 $4 \times 4 = 16$
- ③ Carré sur l'hypoténuse
 $5 \times 5 = 25$
- ④ Et en effet
 $9 + 16 = 25$

l'aire du grand carré est la somme des aires des deux petits



Voilà pourquoi on élève les longueurs au carré au lieu de les additionner : ce sont des **aires** que l'on additionne, pas des longueurs. La relation était connue des Babyloniens près de mille ans avant Pythagore.

Ce raisonnement est une **démonstration** : il ne vérifie pas le théorème sur un triangle, il l'établit sur tous. Un exemple qui marche ne prouve rien — mille exemples non plus. Une démonstration part de ce qui est déjà admis (ici, le calcul d'une aire) et conduit à la conclusion sans jamais la supposer. C'est le geste que la 4^e demande pour la première fois, et il vaut bien plus qu'un résultat juste.

4 Les deux façons de s'en servir

MÉTHODE A — CHERCHER L'HYPOTÉNUSE

- ① Je repère l'angle droit : ABC est rectangle en A , avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm. L'hypoténuse est $[BC]$, et c'est elle que je cherche.
- ② J'écris le théorème.
 $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
- ③ Je n'ai que le carré : je prends la racine.
 $BC = \sqrt{25} = 5$
donc $BC = 5$ cm

MÉTHODE B — CHERCHER UN CÔTÉ MANQUANT DE L'ANGLE DROIT

- ① ABC est rectangle en A , avec $BC = 13$ cm et $AB = 5$ cm. Ici BC est l'hypoténuse : c'est une donnée, pas l'inconnue.
- ② J'écris le théorème dans le même sens.
 $13^2 = 5^2 + AC^2$
- ③ J'isole l'inconnue.
 $AC^2 = 169 - 25 = 144$
- ④ Je prends la racine.
 $AC = \sqrt{144} = 12$
donc $AC = 12$ cm

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

On soustrait les carrés, jamais les longueurs : avec une hypoténuse de 13 et un côté de 5, écrire $13 - 5 = 8$ est faux. — il faut calculer $169 - 25 = 144$, puis la racine, qui vaut 12. La bonne réponse est 12, pas 8.

Le réflexe : repérer l'angle droit **avant** d'écrire quoi que ce soit. Le côté opposé est l'hypoténuse, et il reste seul de son côté du signe égal.

DÉFINITION

Trois entiers $(a ; b ; c)$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$ forment un **triplet pythagoricien** : (3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13), (8 ; 15 ; 17), (7 ; 24 ; 25). Les reconnaître fait gagner un temps considérable — et tout multiple d'un triplet en est un aussi, puisque multiplier les trois côtés par 2 multiplie les trois carrés par 4.

5 Applications géométriques

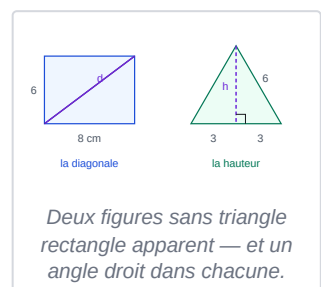
Le théorème ne sert presque jamais sur un triangle rectangle donné tel quel. Il sert dès qu'une figure **contient** un angle droit — et la plupart en contiennent un : rectangle, carré, losange, triangle isocèle coupé par sa hauteur. Le travail consiste à le trouver.

EXEMPLE

Quelle est la longueur de la diagonale d'un rectangle de 8 cm sur 6 cm ?

- ① La diagonale coupe le rectangle en deux triangles rectangles : les côtés du rectangle sont les côtés de l'angle droit, la diagonale est l'hypoténuse.
- ② J'applique le théorème.
 $d^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
- ③ Je prends la racine.
 $d = \sqrt{100} = 10$

la diagonale mesure 10 cm



EXEMPLE

Quelle est la hauteur d'un triangle équilatéral de 6 cm de côté ?

- ① La hauteur d'un triangle équilatéral tombe au **milieu** du côté opposé : elle crée deux triangles rectangles de côtés 3 et h , d'hypoténuse 6.
- ② Ici l'inconnue est un côté de l'angle droit : je soustrais.
 $h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- ③ La racine de 27 n'est pas entière — on garde la valeur exacte, puis on arrondit.
 $h = \sqrt{27} \approx 5,20$
la valeur exacte s'écrit aussi $3\sqrt{3}$ cm.

la hauteur mesure environ 5,20 cm

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Arrondir dès la première ligne, puis continuer le problème avec la valeur arrondie. — chaque arrondi ajoute son erreur à la suivante. Sur un exercice en deux temps, le résultat final peut être faux à l'unité près alors que chaque étape semblait juste.

Le réflexe : garder $\sqrt{27}$ dans tous les calculs et n'arrondir qu'à la toute dernière ligne, à la précision demandée par l'énoncé.

6 La réciproque : démontrer qu'un angle est droit

RÈGLE

Dans un triangle ABC où $[BC]$ est le plus grand côté, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est **rectangle en A**.

EXEMPLE

Avec $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm, les deux calculs se mènent séparément, puis on compare.

- ① D'un côté
 $10^2 = 100$
- ② De l'autre
 $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

les deux résultats sont égaux : le triangle est rectangle en A

EXEMPLE

Avec $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm, le même travail donne l'inverse.

- ① D'un côté
 $6^2 = 36$
- ② De l'autre
 $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$
- ③ On compare
 $36 \neq 41$

le triangle n'est pas rectangle

Écrire d'emblée l'égalité reviendrait à supposer vrai ce qu'on cherche à établir. En 3^e, la trigonométrie prendra le relais dès qu'un *angle* est en jeu ; Pythagore ne fait jamais intervenir que des longueurs.

À VÉRIFIER

- Ai-je **justifié** que le triangle est rectangle, avant d'écrire quoi que ce soit ?
- L'hypoténuse est-elle bien seule d'un côté du signe égal ? C'est elle, et elle seule, qui est le plus grand côté.
- Je cherche l'hypoténuse → j'**additionne**. Je cherche un côté de l'angle droit → je **soustrais**.
- Ai-je pris la **racine carrée** à la fin, ou me suis-je arrêté au carré ?
- N'ai-je arrondi qu'à la dernière ligne, à la précision demandée ?
- Ma conclusion est-elle une **phrase**, avec l'unité ?

À RETENIR

- Pythagore ne s'utilise que dans un **triangle rectangle**.
- L'hypoténuse est **opposée à l'angle droit**, et c'est le plus long côté.
- Chercher l'hypoténuse → **additionner** les carrés.
- Chercher un autre côté → **soustraire** les carrés.
- Toujours finir par une **racine carrée**, puis écrire l'unité.
- La **réciproque** démontre qu'un angle est droit.
- Les triplets à reconnaître : (3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13), (8 ; 15 ; 17) et tous leurs multiples.
- La **diagonale** d'un rectangle, la **hauteur** d'un triangle isocèle : un angle droit s'y cache toujours.
- N'arrondir qu'à la **dernière ligne** — jamais en cours de route.