COURS

4e

Nombres relatifs — Produits et quotients

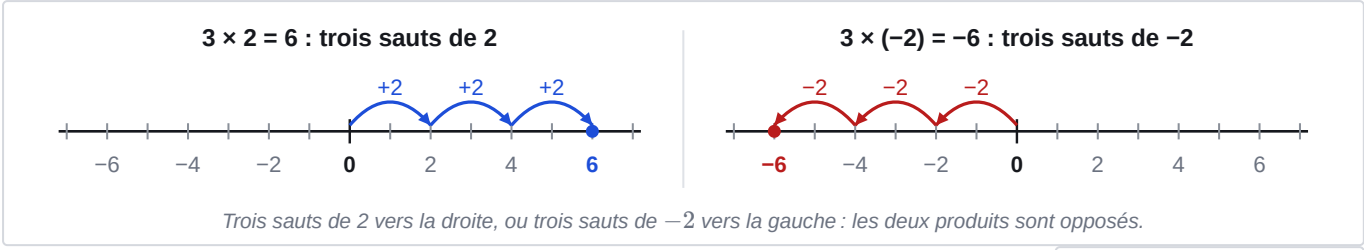
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

En 5e, on a appris à additionner et à soustraire des nombres relatifs. En 4e, on les multiplie et on les divise, et une seule règle gouverne les deux opérations : **le produit ou le quotient de deux nombres de même signe est positif ; de deux nombres de signes contraires, il est négatif.** Le reste est un calcul sur des nombres positifs, que l'on sait déjà faire.

1 Multiplier deux nombres relatifs

DÉFINITION

Un nombre relatif a un **signe** et une **distance à zéro** : $-2{,}5$ a le signe $-$ et la distance à zéro $2{,}5$. Deux nombres **opposés**, comme $2{,}5$ et $-2{,}5$, ont la même distance à zéro et des signes contraires ; leur somme est nulle. Multiplier par un entier positif, c'est ajouter plusieurs fois le même nombre : $3 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$.



Trois sauts de 2 vers la droite, ou trois sauts de -2 vers la gauche : les deux produits sont opposés.

RÈGLE

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif. Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif. Sa distance à zéro est le produit des distances à zéro : $(-4) \times 2{,}5 = -10$ et $4 \times (-2{,}5) = -10$, mais $(-4) \times (-2{,}5) = 10$. En particulier, multiplier par -1 donne l'opposé. Cette règle est **admise** ; l'exemple suivant montre pourquoi elle ne peut pas être autre.

×	+	−
+	+	−
−	−	+

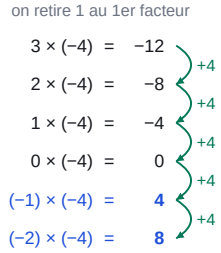
La règle des signes du produit, en une table.

EXEMPLE

Pourquoi $(-3) \times (-4)$ vaut-il 12 ? On admet que la distributivité, vraie pour les nombres positifs, reste vraie pour les relatifs, et l'on calcule $(-3) \times (4 + (-4))$ de deux façons.

1. D'abord la parenthèse : $4 + (-4) = 0$, et un produit dont un facteur vaut 0 est nul. $(-3) \times (4 + (-4)) = (-3) \times 0 = 0$
2. Ensuite la distributivité : le même produit s'écrit $(-3) \times 4 + (-3) \times (-4)$, qui vaut donc 0 lui aussi.
3. Or $(-3) \times 4$ est la somme de quatre termes égaux à -3 : $(-3) \times 4 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$
4. Donc $-12 + (-3) \times (-4) = 0$: le produit $(-3) \times (-4)$ est l'opposé de -12.

$(-3) \times (-4) = 12$: **« moins par moins donne plus » est imposé par la distributivité.**



Autre regard : quand le premier facteur baisse de 1, le produit augmente de 4, même au-delà de zéro.

MULTIPLIER DEUX NOMBRES RELATIFS

1. **Le signe d'abord** : mêmes signes, résultat positif ; signes contraires, résultat négatif.
2. **Les distances à zéro ensuite** : on les multiplie comme des nombres positifs, de tête ou en posant l'opération.
3. **On écrit** le résultat précédé de son signe : $(-0{,}6) \times 1{,}5 = -0{,}9$, car les signes sont contraires et $0{,}6 \times 1{,}5 = 0{,}9$.

EXEMPLE

Calculer $(-3{,}4) \times (-2{,}15)$ à la main.

1. Deux facteurs négatifs : le produit est positif.
2. On pose la multiplication sans les virgules :
   $34 \times 215 = 7\,310$
3. 3,4 a un chiffre après la virgule et 2,15 en a deux : le produit en a trois.
   $3{,}4 \times 2{,}15 = 7{,}310 = 7{,}31$
4. Contrôle par l'ordre de grandeur : $3 \times 2 = 6$, proche de 7,31.

$\underline{(-3{,}4) \times (-2{,}15) = 7{,}31}$

PIÈGE

Écrire $(-3) + (-5) = 8$, « parce que moins par moins donne plus ». — la règle des signes est celle du **produit** et du **quotient**. Dans une somme, deux nombres négatifs s'ajoutent comme deux dettes : $(-3) + (-5) = -8$.

Ce que ça coûte : le calcul, et tous ceux qui en dépendent.

Le réflexe : lire l'opération avant d'appliquer une règle : $\times$ ou $\div$, la règle des signes ; $+$ ou $-$, la règle d'addition de 5e.

PIÈGE

Écrire 5×-2. — deux signes d'opération ne se suivent jamais : on ne sait plus si l'on multiplie ou si l'on soustrait.

Ce que ça coûte : une écriture fausse, même quand le résultat est juste.

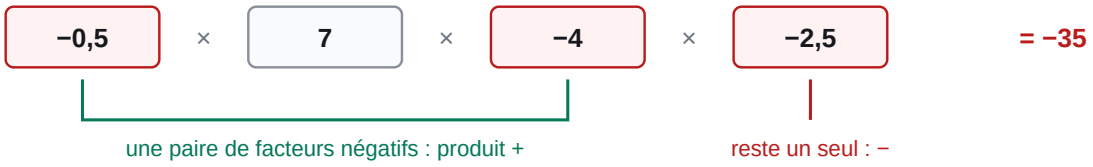
Le réflexe : mettre entre parenthèses tout nombre négatif qui suit un signe d'opération : $5 \times (-2) = -10$.

2 Le produit de plusieurs facteurs

PROPRIÉTÉ

Un produit de facteurs non nuls est positif si le nombre de facteurs négatifs est pair, et négatif s'il est impair. Si l'un des facteurs est nul, le produit est nul. Cette propriété se **démontre** avec la règle des deux facteurs : on regroupe les facteurs négatifs deux par deux, chaque paire donne un produit positif ; s'il en reste un seul, le produit est négatif.

A = (−0,5) × 7 × (−4) × (−2,5) : on regroupe les facteurs négatifs deux par deux



une paire de facteurs négatifs : produit + — reste un seul : −

trois facteurs négatifs, nombre impair : le produit est négatif

Compter les facteurs négatifs est plus sûr que de multiplier de gauche à droite en suivant le signe à chaque étape.

CALCULER UN PRODUIT DE PLUSIEURS FACTEURS

1. **Chercher un facteur nul** : s'il y en a un, le produit vaut 0 et le calcul est fini.
2. **Compter les facteurs négatifs** : un nombre pair donne un produit positif, un nombre impair un produit négatif.
3. **Multiplier les distances à zéro** en regroupant ce qui va bien ensemble, puis écrire le signe devant.
   $0{,}5 \times 4 = 2$ $\quad 2{,}5 \times 4 = 10$ $\quad 0{,}25 \times 8 = 2$
   l'ordre des facteurs ne change pas un produit : on choisit celui qui rend le calcul mental facile.

EXEMPLE

Calculer $A = (-0{,}5) \times 7 \times (-4) \times (-2{,}5)$.

1. Aucun facteur nul. Trois facteurs négatifs : $-0{,}5$, -4 et $-2{,}5$. Trois est impair, donc A est négatif.
2. On multiplie les distances à zéro en commençant par $0{,}5 \times 4$:
   $0{,}5 \times 4 \times 2{,}5 \times 7 = 2 \times 2{,}5 \times 7 = 5 \times 7 = 35$

$\underline{A = -35}$

PIÈGE

Dans $(-2) \times 3 + (-4) \times (-5)$, compter trois signes moins et annoncer un résultat négatif. — la règle du nombre de facteurs négatifs ne vaut que pour **un produit**. Ici, c'est une somme de deux produits : $-6 + 20 = 14$, positif.

Ce que ça coûte : le signe du résultat, donc le résultat.

Le réflexe : repérer la dernière opération à effectuer. Si c'est une addition ou une soustraction, calculer chaque produit à part.

3 Diviser deux nombres relatifs

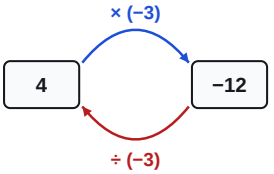
DÉFINITION

Soit b un nombre **non nul**. Le **quotient** de a par b est le nombre q tel que $b \times q = a$. On le note $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$. Par exemple, $(-12) \div (-3) = 4$, car $(-3) \times 4 = -12$. **On ne divise jamais par 0** : le diviseur b doit être non nul.

PROPRIÉTÉ

Le quotient de deux nombres de même signe est positif ; le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif. Sa distance à zéro est le quotient des distances à zéro. C'est la règle du produit, et elle se **démontre** avec la définition : si $b \times q = a$, le signe de q est celui qui, multiplié par le signe de b, donne le signe de a. Un quotient négatif s'écrit de trois façons :

$$\frac{-12}{3} = \frac{12}{-3} = -\frac{12}{3} = -4$$



Diviser par -3, c'est défaire une multiplication par -3.

DIVISER DEUX DÉCIMAUX RELATIFS

1. **Le signe** : même règle que pour le produit.
2. **Rendre le diviseur entier** s'il est décimal : on multiplie les deux nombres par 10, 100… ; le quotient ne change pas (rappel de 6e) : $6{,}3 \div 0{,}7 = 63 \div 7$.
3. **Diviser les distances à zéro**, de tête ou en posant la division, puis écrire le signe devant.
4. **Contrôler** : le quotient multiplié par le diviseur doit redonner le dividende.

EXEMPLE

Calculer $D = (-6{,}3) \div (-0{,}7)$ et $E = 7{,}2 \div (-5)$.

1. D : deux nombres négatifs, le quotient est positif ; on multiplie les deux nombres par 10.
   $6{,}3 \div 0{,}7 = 63 \div 7 = 9$
2. E : signes contraires, le quotient est négatif. On pose la division de 7,2 par 5 :
   $7{,}2 \div 5 = 1{,}44$
   contrôle : $(-1{,}44) \times (-5) = 7{,}2$.

$D = 9$ **et** $E = -1{,}44$

Le quotient de deux décimaux n'est pas toujours un décimal : $(-10) \div 3 = -3{,}333\ldots$, la division ne s'arrête jamais. On garde alors la **valeur exacte** $-\frac{10}{3}$, ou l'on donne une **valeur approchée**, par exemple $-3{,}33$ au centième près.

PIÈGE

Écrire $(-7{,}5) \div 0 = 0$. — il faudrait un nombre q tel que $0 \times q = -7{,}5$; or $0 \times q$ vaut toujours 0. Ce quotient n'existe pas. En revanche, $0 \div (-7{,}5) = 0$, car $(-7{,}5) \times 0 = 0$.

Ce que ça coûte : un résultat inventé, là où la bonne réponse était « impossible ».

Le réflexe : regarder le diviseur avant de calculer : s'il est nul, le calcul est impossible, et on l'écrit.

PIÈGE

Écrire $\frac{-8}{-2} = -4$, « parce que le signe moins reste ». — un signe $-$ au numérateur et un au dénominateur : deux nombres négatifs, le quotient est positif, $\frac{-8}{-2} = 4$.

Ce que ça coûte : le signe, donc le résultat.

Le réflexe : lire la barre de fraction comme un signe $\div$, et appliquer la règle des signes.

4 Enchaîner les calculs et les vérifier

RÈGLE

Les priorités ne changent pas avec les relatifs (rappel de 5e) : d'abord les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et les divisions de gauche à droite, enfin les additions et les soustractions de gauche à droite. Une **barre de fraction** agit comme des parenthèses autour du numérateur et autour du dénominateur.

EXEMPLE

Calculer $F = (-2) \times (5 - 8) - 12 \div (-4)$.

1. La parenthèse d'abord :
   $5 - 8 = -3$
2. Puis le produit et le quotient, avec la règle des signes :
   $(-2) \times (-3) = 6$
   et $12 \div (-4) = -3$.
3. Enfin la soustraction : soustraire -3, c'est ajouter 3.
   $6 - (-3) = 6 + 3 = 9$

$\underline{F = 9}$

VÉRIFIER UN CALCUL À LA CALCULATRICE

1. **Prévoir le signe** avec la règle des signes, avant de toucher la machine.
2. **Estimer un ordre de grandeur** en remplaçant chaque nombre par une valeur proche et simple.
3. **Saisir** chaque nombre négatif avec la touche du signe, souvent notée `(-)`, et mettre entre parenthèses le numérateur et le dénominateur d'une fraction. Un signe inattendu, ou un résultat loin de l'estimation, signale une erreur.

EXEMPLE

Calculer $H = \dfrac{12{,}6 \times (-4{,}9)}{(-2{,}1) \times 9{,}8}$ à la calculatrice, et contrôler le résultat.

1. Le signe : le numérateur et le dénominateur sont négatifs, donc H est positif.
2. L'ordre de grandeur : $13 \times 5 = 65$ et $2 \times 10 = 20$, donc H est proche de $65 \div 20 = 3{,}25$.
3. La calculatrice, avec des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur :
   $\dfrac{12{,}6 \times (-4{,}9)}{(-2{,}1) \times 9{,}8} = \dfrac{-61{,}74}{-20{,}58} = 3$

$\underline{H = 3}$ **: positif et proche de l'estimation, comme prévu.**

PIÈGE

Saisir `12,6 × (-) 4,9 ÷ (-) 2,1 × 9,8` sans parenthèses, et recopier 288,12. — sans parenthèses, la machine divise par $-2{,}1$, puis **multiplie** le résultat par $9{,}8$ au lieu de diviser encore.

Ce que ça coûte : un résultat faux, sans calcul intermédiaire à valoriser.

Le réflexe : comparer à l'estimation : 288 est près de cent fois trop grand. Ressaisir avec des parenthèses.

PIÈGE

Calculer $-3 + 4 \times (-2{,}5)$ comme $(-3 + 4) \times (-2{,}5) = -2{,}5$. — la multiplication passe avant l'addition, avec des relatifs comme avec des positifs : $-3 + 4 \times (-2{,}5) = -3 + (-10) = -13$.

Ce que ça coûte : le résultat entier, même si chaque opération est juste.

Le réflexe : souligner d'abord les produits et les quotients, les calculer, puis seulement additionner.

À VÉRIFIER

- Ai-je lu l'opération avant d'appliquer une règle de signes : $\times$ et $\div$, ou $+$ et $-$?
- Plusieurs facteurs : ai-je cherché un 0, puis compté les facteurs négatifs ?
- Chaque nombre négatif qui suit un signe d'opération est-il entre parenthèses ?
- Le diviseur est-il non nul ? Ai-je contrôlé le quotient par une multiplication ?
- Le résultat de la calculatrice a-t-il le signe prévu et l'ordre de grandeur estimé ?

À RETENIR

- Produit ou quotient de deux nombres : **mêmes signes, positif ; signes contraires, négatif**.
- Plusieurs facteurs non nuls : un nombre **pair** de facteurs négatifs donne un produit positif, un nombre **impair** un produit négatif.
- $a \div b$ est le nombre q tel que $b \times q = a$; **on ne divise jamais par 0**.
- Le signe d'abord, les distances à zéro ensuite ; un nombre négatif qui suit $\times$ ou $\div$ s'écrit entre parenthèses.
- Les priorités ne changent pas ; un résultat se contrôle par son **signe** et son **ordre de grandeur**.