

Théorème de Thalès — Configuration et agrandissement

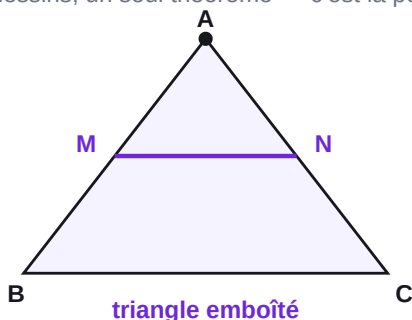
4^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

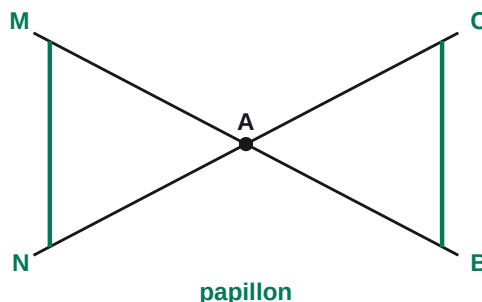
Thalès dit une chose simple : **deux droites parallèles découpent deux sécantes dans les mêmes proportions**. C'est ce qui permet de mesurer une pyramide avec un bâton, ou la largeur d'une rivière sans la traverser. Toute la difficulté est de reconnaître la configuration et d'écrire les rapports dans le bon ordre.

1 Reconnaître la configuration

deux dessins, un seul théorème — c'est la position du point d'intersection qui change



triangle emboîté



papillon

Emboîté quand le sommet est en dehors des parallèles, papillon quand il est entre elles.

RÈGLE

Si M appartient à (AB) , N à (AC) et si (MN) est **parallèle** à (BC) , alors les trois rapports sont égaux.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

ÉCRIRE LES RAPPORTS SANS SE TROMPER

- Repérer le **sommet commun** — le point par lequel passent les deux sécantes. C'est lui qui ouvre chaque longueur du numérateur et du dénominateur.
- Écrire les trois rapports en partant toujours du sommet : petit triangle au numérateur, grand au dénominateur. garder le même sens partout est la seule protection contre l'inversion.
- Ne garder que le rapport qui contient l'inconnue **et** deux longueurs connues, puis faire le produit en croix.

EXEMPLE

$AM = 4$ cm, $AB = 10$ cm, $AC = 15$ cm et $(MN) \parallel (BC)$. Calculer AN .

- On écrit le rapport utile, celui qui relie les deux sécantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

- On remplace par les valeurs connues :

$$\frac{4}{10} = \frac{AN}{15}$$

- Produit en croix :

$$AN = \frac{4 \times 15}{10} = 6$$

AN = 6 cm

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Mélanger les deux triangles dans un même rapport, comme $\frac{AM}{AC}$. — AM appartient à une sécante et AC à l'autre : ce rapport ne compare rien. Thalès compare le petit triangle au grand **sur la même droite**, ou les deux bases entre elles.

Le réflexe : avant d'écrire, tracer les longueurs au crayon sur la figure. Un rapport correct se lit toujours le long d'un seul segment de droite.

2 Agrandissement et réduction

DÉFINITION

Quand $(MN) \parallel (BC)$, le petit triangle AMN est une **réduction** du grand triangle ABC . Le rapport commun $k = \frac{AM}{AB}$ est le coefficient : $k < 1$ pour une réduction, $k > 1$ pour un agrandissement. **Toutes** les longueurs sont multipliées par k , et les angles ne changent pas.

PROPRIÉTÉ

Les aires, elles, ne suivent pas le même coefficient : elles sont multipliées par k^2 . Doubler les longueurs d'une figure quadruple son aire.

$$\text{aire réduite} = k^2 \times \text{aire d'origine}$$

C'est pourquoi une photo agrandie deux fois occupe quatre fois plus de papier, et pourquoi une maquette au 1/100 d'un bâtiment a une façade **dix mille fois** plus petite que l'originale. Le réflexe « je multiplie l'aire par k » est l'erreur la plus coûteuse du chapitre.

3 La réciproque : prouver que deux droites sont parallèles

RÈGLE

Si les points sont **alignés dans le même ordre** sur les deux sécantes et si les deux rapports sont égaux, alors les droites sont parallèles. La condition d'ordre n'est pas un détail : sans elle, la conclusion est fausse.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \implies (MN) \parallel (BC)$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Lire le parallélisme sur le dessin au lieu de le démontrer. — une figure n'est jamais une preuve — elle est dessinée à main levée ou codée pour induire en erreur. Utiliser Thalès sans avoir établi le parallélisme, c'est utiliser une hypothèse qu'on n'a pas.

Le réflexe : chercher dans l'énoncé la phrase qui donne le parallélisme. Si elle n'y est pas, c'est qu'il faut le démontrer avec la réciproque — et c'est la question.

EXEMPLE

Une maquette d'immeuble est au 1/200. Sa hauteur sur la maquette est de 9 cm et la façade y occupe 45 cm².

① Les longueurs réelles sont 200 fois plus grandes :
 $9 \times 200 = 1800$

② L'immeuble mesure donc 1 800 cm, soit 18 m.

③ Les aires, elles, sont multipliées par 200^2 :
 $45 \times 40\,000 = 1\,800\,000$

1 800 000 cm², soit 180 m² de façade

À VÉRIFIER

- Le parallélisme est-il donné par l'énoncé, ou dois-je le démontrer ?
- Ai-je repéré le sommet commun avant d'écrire le moindre rapport ?
- Chacun de mes rapports se lit-il le long d'une seule sécante ?
- S'agit-il d'une aire ? Alors le coefficient est k^2 , pas k .
- Le petit triangle est-il bien resté le plus petit dans ma réponse ?

À RETENIR

- Thalès exige **deux droites parallèles** — donnée ou démontrée, jamais lue sur le dessin.
- Partir du **sommet commun** et garder le même sens dans les trois rapports.
- Un rapport correct se lit le long d'une seule sécante : jamais $\frac{AM}{AC}$.
- Les longueurs sont multipliées par k , les **aires par k^2** .
- La réciproque exige que les points soient alignés **dans le même ordre**.
- Contrôle de bon sens : le petit triangle doit rester le petit.