COURS

4e

# Translations planes — Agrandissements et réductions

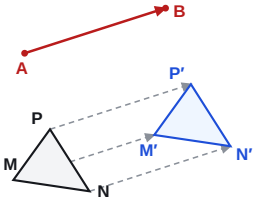
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Faire glisser un calque sur la feuille, sans le tourner ni le retourner : c'est une **translation**. Photocopier en zoomant, construire une maquette, lire une carte : c'est un **agrandissement** ou une **réduction**. Le chapitre tient en une phrase : **une translation conserve longueurs, angles, aires et parallélisme ; un agrandissement ou une réduction de rapport $k$ conserve les angles et multiplie les longueurs par $k$, les aires par $k^2$, les volumes par $k^3$.**

## 1 Faire glisser une figure : la translation

**DÉFINITION**

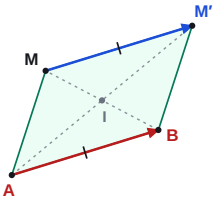
La **translation qui transforme $A$ en $B$** fait **glisser** toute figure comme un calque qu'on déplace en suivant la flèche de $A$ vers $B$, **sans le tourner ni le retourner**. Chaque point se déplace dans la **direction** de la droite $(AB)$, dans le **sens** de $A$ vers $B$, et de la **longueur** $AB$. Le point obtenu est l'**image** du point de départ ; la figure obtenue, l'**image** de la figure. Par commodité, on dit aussi « translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ », sans qu'aucune connaissance sur les vecteurs soit attendue en 4e.




*Trois flèches parallèles, de même sens et de même longueur que celle de $A$ vers $B$.*

**PROPRIÉTÉ**

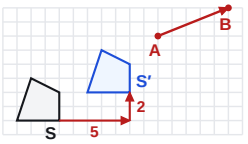
**Translation et parallélogramme** (propriété admise). Si la translation qui transforme $A$ en $B$ transforme $M$ en $M'$, alors $ABM'M$ est un **parallélogramme**, sommets lus **dans cet ordre** : $A$, son image $B$, puis $M'$, puis $M$. Donc $MM' = AB$ et $(MM')$ est parallèle à $(AB)$. Si $M$ est sur la droite $(AB)$, le parallélogramme est « aplati » : les quatre points sont alignés, et $MM' = AB$ reste vrai.




*$[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu $I$.*

**CONSTRUIRE L'IMAGE D'UNE FIGURE SUR QUADRILLAGE**

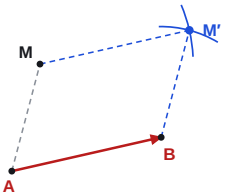
1. Lire le trajet de $A$ à $B$ en carreaux : tant vers la droite ou la gauche, tant vers le haut ou le bas.
2. Refaire **exactement le même trajet** depuis chaque sommet : on obtient les sommets images.
3. Relier les sommets images **dans le même ordre** que ceux de départ.




*$S$ fait le trajet de $A$ à $B$ : 5 carreaux à droite, 2 vers le haut.*

**CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT SUR FEUILLE BLANCHE**

1. L'image $M'$ de $M$ est le quatrième sommet du parallélogramme $ABM'M$.
2. Tracer l'arc de centre $M$ et de rayon $AB$, puis l'arc de centre $B$ et de rayon $AM$.
   rappel de 5e : un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.
3. $M'$ est leur point commun situé **du côté où pointe la flèche** : contrôler que $(MM')$ est parallèle à $(AB)$.




*Deux arcs de cercle, et $M'$ à leur intersection.*

**EXEMPLE**

Pour aller de $A$ à $B$, on fait 5 carreaux à droite et 2 vers le haut. Un point $K$ est à 3 carreaux à gauche et 1 au-dessous de $A$. Où est l'image $K'$ de $K$ par la translation qui transforme $A$ en $B$ ?

1. $ABK'K$ est un parallélogramme : $K'$ est placé par rapport à $B$ comme $K$ par rapport à $A$.

**$K'$ est à 3 carreaux à gauche et 1 au-dessous de $B$.**

**PIÈGE**

**Écrire que $ABMM'$ est un parallélogramme.** — dans cet ordre, $[AB]$ et $[MM']$ deviennent les **diagonales** : le quadrilatère obtenu est croisé.

**Ce que ça coûte :** la conclusion de la démonstration est fausse.

**Le réflexe :** suivre le contour : de $A$ à son image $B$, puis $M'$, et retour par $M$.

**PIÈGE**

**Faire le trajet de $B$ vers $A$, ou tourner la figure en la déplaçant.** — la translation qui transforme $A$ en $B$ envoie $A$ sur $B$ : le sens compte. Et elle fait seulement glisser : chaque côté image est parallèle au côté de départ.

**Ce que ça coûte :** toute la figure image est fausse.

**Le réflexe :** vérifier que l'image de $A$ est bien $B$, et qu'un côté horizontal reste horizontal.

**PIÈGE**

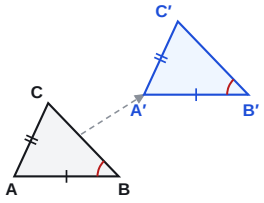
**Relier les sommets images dans le désordre.** — l'image de $[RS]$ est $[R'S']$ : relier $R'$ à $T'$ à la place change la figure.

**Le réflexe :** nommer chaque image dès qu'on la place : $R'$, $S'$, $T'$.

## 2 Ce que conserve une translation

**PROPRIÉTÉ**

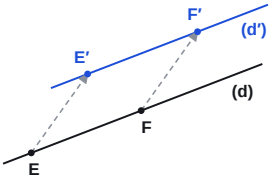
Une translation **conserve les longueurs, les angles, les aires, l'alignement et le parallélisme** : une figure et son image sont **superposables** (propriétés admises). L'image d'un **segment** est un segment parallèle de **même longueur** ; celle d'un **cercle**, un cercle de **même rayon** centré en l'image du centre ; celle du **milieu** d'un segment, le milieu du segment image.




*Mêmes codages, même angle : $A'B'C'$ est superposable à $ABC$.*

**JUSTIFIER AVEC UNE TRANSLATION**

1. **On sait que** : nommer la translation et les images utiles.
2. **Or** : citer la propriété qui sert. Par exemple : « l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est **parallèle** ».
3. **Donc** : conclure, sans jamais mesurer sur la figure.




*$(d')$, image de $(d)$, lui est parallèle, et $E'F' = EF$.*

**EXEMPLE**

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle $ABC$ par une translation, avec $AB = 5$ cm, $\widehat{ABC} = 48^\circ$ et une aire de 9 cm². Donner $A'B'$, $\widehat{A'B'C'}$ et l'aire de $A'B'C'$, puis justifier que $(A'B')$ est parallèle à $(AB)$.

1. Une translation conserve les longueurs, les angles et les aires : $A'B' = AB = 5$ cm, $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 48^\circ$, et l'aire de $A'B'C'$ vaut 9 cm².
2. **On sait que** $(A'B')$ est l'image de $(AB)$. **Or** l'image d'une droite par une translation lui est parallèle. **Donc** $(A'B')$ est parallèle à $(AB)$.

**$A'B' = 5$ cm, $\widehat{A'B'C'} = 48^\circ$, aire de 9 cm², et $(A'B')$ parallèle à $(AB)$.**

**PIÈGE**

**Mesurer l'image pour donner une longueur ou un angle.** — une figure n'est jamais tracée exactement, et une mesure ne démontre rien.

**Ce que ça coûte :** la justification attendue ne rapporte rien sans la propriété citée.

**Le réflexe :** écrire « une translation conserve les longueurs » (ou les angles, les aires), puis recopier la valeur de départ.

## 3 Des translations dans les frises et les pavages

**DÉFINITION**

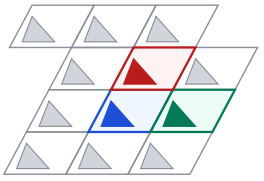
Une **frise** est une bande où un même motif se répète régulièrement. Un **pavage** recouvre le plan, sans trou ni chevauchement, avec des copies d'un même motif. On y cherche des **translations** : celles qui envoient un motif sur un autre.




*Un F sur deux est retourné : le motif 2 est le symétrique du motif 1 par rapport à un axe. Il faut deux pas pour retrouver un motif par translation.*

**RECONNAÎTRE UNE TRANSLATION ENTRE DEUX MOTIFS**

1. Le motif d'arrivée a-t-il **la même orientation** ? Retourné comme dans un miroir, ou la tête en bas : ce n'est pas une translation.
2. Choisir un sommet du motif de départ et le sommet **correspondant** à l'arrivée : la translation est celle qui transforme le premier en le second. Vérifier sur un deuxième sommet.



*Le motif bleu glisse d'un pas vers la droite (vert) ou le long des côtés penchés (rouge).*

**EXEMPLE**

Dans cette frise, deux motifs voisins sont espacés de 2,6 cm. Le motif 5 est-il l'image du motif 1 par une translation ? Et le motif 4 ?

1. Le motif 5 a la même orientation que le motif 1, à 4 pas de lui ; le motif 4 est retourné. En cm :
   $4 \times 2{,}6 = 10{,}4$

**le motif 5 est l'image du motif 1 par une translation de 10,4 cm vers la droite ; le motif 4 ne l'est pas.**

**PIÈGE**

**Croire que deux motifs voisins sont toujours images l'un de l'autre par une translation.** — le voisin est souvent **retourné** (symétrie axiale) ou a fait un **demi-tour** (symétrie centrale).

**Le réflexe :** comparer l'orientation avant de chercher le trajet.

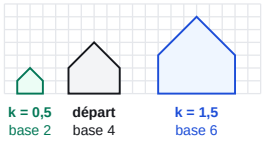
## 4 Agrandir et réduire une figure

**DÉFINITION**

Agrandir ou réduire une figure, c'est **multiplier toutes ses longueurs par un même nombre** $k > 0$, le **rapport** : **agrandissement** si $k > 1$, **réduction** si $0 < k < 1$. Les longueurs obtenues sont **proportionnelles** aux longueurs de départ, de coefficient $k$ : longueur obtenue divisée par longueur de départ.

**PROPRIÉTÉ**

Un agrandissement ou une réduction **conserve les angles** : la figure garde sa forme, et le parallélisme comme la perpendicularité sont conservés. Seules les longueurs changent, toutes multipliées par $k$.




*Toutes les longueurs multipliées par 0,5 ou par 1,5, pans du toit compris ; les angles ne changent pas.*

**CALCULER, PUIS CONSTRUIRE**

1. Calculer $k$ avec **deux longueurs correspondantes** : la longueur obtenue divisée par la longueur de départ.
2. Multiplier chaque longueur de départ par $k$ ; pour revenir de la figure obtenue à celle de départ, **diviser** par $k$. Contrôle : $k > 1$ pour agrandir, $k < 1$ pour réduire.
3. Pour **construire** la figure : sur quadrillage, multiplier par $k$ chaque déplacement en carreaux ; sur feuille blanche, tracer les longueurs multipliées par $k$ en **reportant les mêmes angles**.

**EXEMPLE**

**Échelle d'une carte.** Une carte est une réduction du terrain ; son échelle est le rapport de réduction, les longueurs étant dans **la même unité**. Sur une carte au $\frac{1}{25\,000}$, deux villages sont à 4,8 cm l'un de l'autre. Quelle est la distance réelle ?

1. Sur le terrain, la distance est 25 000 fois plus grande, en cm :
   $4{,}8 \times 25\,000 = 120\,000$
   et 120 000 cm = 1 200 m = 1,2 km.

**les deux villages sont à 1,2 km l'un de l'autre : 1 cm sur la carte représente 250 m.**

**PIÈGE**

**Agrandir en ajoutant la même longueur partout : « j'ajoute 2 cm à chaque côté ».** — un rectangle de 2 cm sur 4 cm deviendrait 4 cm sur 6 cm : la largeur est multipliée par 2, la longueur par 1,5. La figure est déformée.

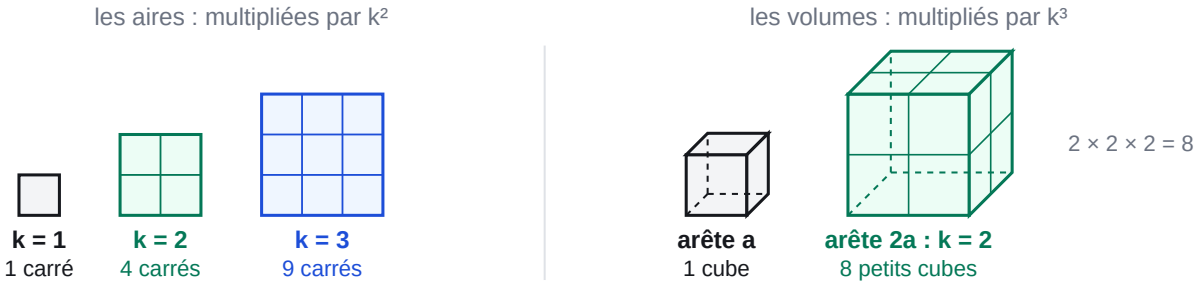
**Ce que ça coûte :** toutes les longueurs calculées ensuite sont fausses.

**Le réflexe :** agrandir, c'est **multiplier** toutes les longueurs par le même nombre.

## 5 Effet sur les aires et les volumes

**PROPRIÉTÉ**

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport $k$, les **longueurs** sont multipliées par $k$, les **aires** par $k^2$ et les **volumes** par $k^3$. Propriété admise en général ; sur le rectangle et le pavé droit, elle se vérifie, car chaque dimension est multipliée par $k$ : $(kL) \times (k\ell) = k^2 \times L\ell$ et $(kL) \times (k\ell) \times (kh) = k^3 \times L\ell h$.




*Doubler le côté d'un carré multiplie son aire par 4, le tripler par 9. En perspective cavalière, doubler l'arête d'un cube multiplie son volume par 8.*

**CALCULER UNE AIRE OU UN VOLUME**

1. Trouver $k$ avec deux **longueurs** correspondantes ; multiplier une **aire** par $k^2$, un **volume** par $k^3$.
2. Pour retrouver $k$ à partir d'un rapport d'aires, prendre sa **racine carrée** : si l'aire est multipliée par 9, alors $k^2 = 9$ et $k = 3$, puisque $k > 0$.
   $\sqrt{9} = 3$

**EXEMPLE**

Un rectangle de 3 cm sur 5 cm est agrandi de rapport 2 ; un pavé droit de 5 cm sur 4 cm sur 3 cm est réduit de rapport 0,5. Calculer la nouvelle aire et le nouveau volume.

1. Aire de départ : 15 cm². Elle est multipliée par $k^2$, en cm² :
   $15 \times 2^2 = 15 \times 4 = 60$
2. Volume de départ : 60 cm³. Il est multiplié par $k^3$, en cm³ :
   $60 \times 0{,}5^3 = 60 \times 0{,}125 = 7{,}5$

**aire de 60 cm² pour le rectangle agrandi, volume de 7,5 cm³ pour le pavé réduit.**

**PIÈGE**

**« Si je double les longueurs, l'aire double. »** — l'aire est multipliée par $2^2 = 4$ et le volume par $2^3 = 8$ : le carré de côté double contient 4 carrés de départ.

**Ce que ça coûte :** l'aire ou le volume final est faux, d'un facteur 2 ou 4.

**Le réflexe :** longueur : $k$ ; aire : $k^2$ ; volume : $k^3$. L'exposant suit l'unité : cm, cm², cm³. Et dans l'autre sens, $k^2 = 16$ donne $k = 4$, pas 8.

**À VÉRIFIER**

- Translation : le **même trajet** que de $A$ vers $B$, dans le bon sens ?
- Parallélogramme : sommets dans l'ordre $ABM'M$ ?
- Conservation : la **propriété citée** plutôt qu'une mesure ?
- Aire : $k^2$ ; volume : $k^3$ ; angles : inchangés ?
- Échelle : les deux longueurs dans **la même unité** ?

**À RETENIR**

- Translation qui transforme $A$ en $B$ : la figure **glisse** comme la flèche, et $ABM'M$ est un **parallélogramme**.
- Elle **conserve** longueurs, angles, aires et parallélisme ; dans une frise, seul un motif de **même orientation** en est l'image.
- Rapport $k$ : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$, angles inchangés.
- Échelle d'une carte : le rapport de réduction, longueurs dans **la même unité**.