CORRIGÉ

4e

Corrigé détaillé
8 exercices

Triangles égaux — Cas d'égalité et démonstration

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Quel cas d'égalité ?

1. a. **Égaux**, 1er cas : trois côtés de même longueur deux à deux.
2. b. **Égaux**, 2e cas : l'angle en A est compris entre $[AB]$ et $[AC]$, l'angle en D entre $[DE]$ et $[DF]$.
3. c. **Égaux**, 3e cas : $[AB]$ et $[DE]$ sont compris entre les deux angles connus.
4. d. **On ne peut pas conclure** : l'angle en B n'est pas compris entre $[AB]$ et $[AC]$. Deux triangles différents ont ces données (voir le cours).
5. e. **Égaux**, 3e cas, après un calcul : le troisième angle mesure, dans chaque triangle,
   $180 - 40 - 75 = 65$
   donc $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 65^\circ$, et $[AB]$, $[DE]$ sont compris entre deux angles égaux

2 Construire, puis comparer

1. a. Tracer $[KL]$ de 7 cm ; un arc de centre K et de rayon 4 cm, un arc de centre L et de rayon 5 cm ; M est un de leurs points d'intersection. La construction est possible car $7 < 4 + 5$.
   contrôle : $\widehat{KML}$ mesure environ 102°
2. b. Tracer $[NO]$ de 5 cm ; au rapporteur, la demi-droite d'origine N qui forme un angle de 70° avec $[NO)$; y placer P à 6 cm de N.
   contrôle : OP mesure environ 6,4 cm
3. c. La somme des angles vaut 180° :
   $180 - 35 - 110 = 35$
   $\widehat{UWV} = 35^\circ$
4. Tracer $[UV]$ de 6 cm ; au rapporteur, la demi-droite d'origine U à 35° de $[UV)$, puis, du même côté de (UV), la demi-droite d'origine V à 110° de $[VU)$. W est leur point de rencontre ; on vérifie au rapporteur que $\widehat{UWV}$ mesure 35°.
5. d. Les données de a. sont trois côtés (1er cas), celles de b. deux côtés et l'angle compris (2e cas), celles de c. un côté et les deux angles à ses extrémités (3e cas). Dans chaque cas, deux triangles construits avec ces données sont égaux, donc superposables.

3 Écrire un protocole de construction

1. a. 1) Tracer le segment $[RS]$ de longueur 6 cm.
2. 2) Au rapporteur, tracer la demi-droite d'origine R qui forme avec $[RS)$ un angle de 45°.
3. 3) Sur cette demi-droite, placer le point T tel que $RT = 4$ cm. 4) Tracer le segment $[ST]$.
4. b. Les données sont deux côtés, $[RS]$ et $[RT]$, et l'angle $\widehat{SRT}$ qu'ils forment : c'est le **2e cas**. Deux triangles construits avec ces données sont égaux.
5. c. Le plus long côté mesure 11 cm, et la somme des deux autres vaut :
   $6 + 4 = 10$
   $11 > 10$: l'inégalité triangulaire n'est pas respectée, le triangle XYZ ne peut pas être construit

4 Le cerf-volant : démontrer, puis calculer

1. a. **On sait que** $AB = AD$ et $CB = CD$ (énoncé), et $[AC]$ est un côté commun aux deux triangles.
2. **Or** deux triangles dont les trois côtés sont de même longueur deux à deux sont égaux (1er cas). **Donc** ABC et ADC sont égaux, avec A sur A, B sur D, C sur C.
3. b. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAC}$ sont homologues : ils font face à $[BC]$ et à $[DC]$. Ils sont donc égaux, et ensemble ils forment $\widehat{BAD}$:
   $80 \div 2 = 40$
   $\widehat{BAC} = 40^\circ$
4. c. $\widehat{ADC}$ est l'homologue de $\widehat{ABC}$: $\widehat{ADC} = 115^\circ$.
5. Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180° :
   $180 - 40 - 115 = 25$
   $\widehat{BCA} = 25^\circ$
6. $\widehat{DCA}$ est l'homologue de $\widehat{BCA}$, donc mesure aussi 25° :
   $2 \times 25 = 50$
   $\widehat{BCD} = 50^\circ$

---

5 Repérer l'erreur

1. a. L'angle $\widehat{ABC}$ a pour sommet B : il n'est pas compris entre $[AB]$ et $[AC]$, qui se rejoignent en A. Le 2e cas ne s'applique pas.
2. Et la conclusion peut être fausse : le cercle de centre A et de rayon 4 cm coupe deux fois la demi-droite issue de B, donc deux triangles différents ont ces données.
3. b. Trois angles ne fixent pas la taille : un triangle d'hypoténuse 4 cm et un triangle d'hypoténuse 8 cm peuvent avoir tous deux ces angles. Aucun cas d'égalité ne repose sur les seuls angles.
4. c. $\widehat{SRT}$ fait face à $[ST]$, dont l'homologue est $[VW]$; l'angle qui fait face à $[VW]$ a pour sommet U. **Donc** $\widehat{SRT} = \widehat{VUW}$, et non $\widehat{UVW}$.

---

6 Démontrer une propriété du parallélogramme

1. a. Les droites parallèles (AB) et (DC) sont coupées par la sécante (AC) : $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont **alternes-internes**. **Or** si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même mesure. **Donc** $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$.
2. De même, avec $(AD) \parallel (BC)$ et la sécante (AC) : $\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$.
3. b. **On sait que** $[AC]$ est un côté commun, que $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ et que $\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$: dans chaque triangle, ce sont les angles aux deux extrémités de $[AC]$.
4. **Or** deux triangles qui ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure deux à deux sont égaux (3e cas). **Donc** ABC et CDA sont égaux, avec A sur C, B sur D, C sur A.
5. c. Les côtés homologues sont $[AB]$ et $[CD]$, puis $[BC]$ et $[DA]$. **Donc** $AB = CD$ et $AD = BC$.
6. On a démontré que **les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur deux à deux**.

---

7 La largeur de la rivière

1. a. **On sait que** $AM = BM = 25$ m (énoncé).
2. $\widehat{TAM} = \widehat{CBM} = 90^\circ$, car (AT) et (BC) sont perpendiculaires à la rive.
3. $\widehat{AMT} = \widehat{BMC}$: A, M, B d'une part, T, M, C d'autre part sont alignés, donc ce sont des angles **opposés par le sommet**.
4. **Or** deux triangles qui ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure deux à deux sont égaux (3e cas) : $[AM]$ est compris entre les angles en A et en M, $[BM]$ entre les angles en B et en M. **Donc** AMT et BMC sont égaux, avec A sur B, M sur M, T sur C.
5. b. $[AT]$ et $[BC]$ sont homologues : ils font face aux angles égaux en M. Donc $AT = BC = 18$ m : **la rivière mesure 18 m de large.**
6. c. Non. La démonstration reste valable pour toute longueur, pourvu que $AM = MB$: le point C se place ailleurs, mais on a toujours $BC = AT$, soit 18 m.

---

8 Deux segments dans un carré

1. a. **On sait que** $DA = AB = 6$ cm (côtés du carré), $AE = BF = 2$ cm (énoncé), et $\widehat{DAE} = \widehat{ABF} = 90^\circ$ (angles du carré, car E est sur $[AB]$ et F sur $[BC]$).
2. L'angle droit en A est compris entre $[AD]$ et $[AE]$, celui en B entre $[BA]$ et $[BF]$. **Or** deux triangles qui ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur deux à deux sont égaux (2e cas). **Donc** DAE et ABF sont égaux, avec D sur A, A sur B, E sur F.
3. b. $[DE]$ et $[AF]$ sont homologues (ils font face aux angles droits) : $DE = AF$. $\widehat{ADE}$ et $\widehat{BAF}$ sont homologues (ils font face à $[AE]$ et à $[BF]$) : $\widehat{ADE} = \widehat{BAF}$.
4. c. I est sur $[AF]$, donc $\widehat{DAI} + \widehat{BAF} = \widehat{DAB} = 90^\circ$, et $\widehat{DAI} = 90^\circ - \widehat{BAF}$.
5. I est sur $[DE]$, donc $\widehat{ADI} = \widehat{ADE} = \widehat{BAF}$. Dans le triangle ADI, la somme des angles vaut 180° : $\widehat{AID} = 180^\circ - \widehat{BAF} - (90^\circ - \widehat{BAF})$. Les deux $\widehat{BAF}$ se compensent :
   $180 - 90 = 90$
6. $\widehat{AID} = 90^\circ$: **les droites** (DE) **et** (AF) **sont perpendiculaires**, en I.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Écrire un protocole de construction complet, que l'on peut suivre sans la figure	2 pts	Un angle sans sommet ni côté de départ ; un point utilisé avant d'être construit
Lister trois égalités, chacune justifiée (énoncé, codage, côté commun, angles opposés par le sommet)	2 pts	Oublier le côté commun ; s'arrêter à deux égalités ; lire une égalité sur le dessin
Citer le cas d'égalité qui convient, avec ses conditions	2 pts	Invoquer trois angles, ou un angle qui n'est pas compris entre les deux côtés
Associer correctement les sommets, côtés et angles homologues	2 pts	Apparier les sommets dans l'ordre de l'énoncé au lieu de l'ordre de superposition
Revenir à la question : longueur ou angle cherché, avec l'unité, dans une phrase	2 pts	S'arrêter à « les triangles sont égaux » sans en déduire ce qui était demandé