COURS

4e

Triangles égaux — Cas d'égalité et démonstration

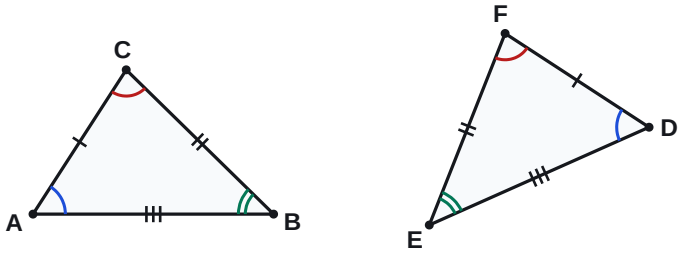
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 17 juillet 2020, BO n° 31 du 30 juillet 2020 — MENE2018714A

Deux élèves construisent chacun un triangle de côtés 4 cm, 5 cm et 6 cm : découpés, leurs triangles se superposent exactement. Trois données bien choisies suffisent donc à fixer un triangle, et c'est tout le chapitre : **si deux triangles ont leurs trois côtés de même longueur deux à deux, ou deux côtés et l'angle qu'ils forment, ou un côté et les deux angles à ses extrémités, alors ils sont égaux — et tous leurs autres côtés et angles se correspondent aussi.** C'est un outil pour démontrer qu'une longueur ou un angle en vaut un autre, sans rien mesurer.

1 Triangles égaux et éléments homologues

DÉFINITION

Deux triangles sont **égaux** lorsqu'ils sont **superposables** : on peut amener l'un exactement sur l'autre, comme un calque qu'on fait glisser, tourner et, au besoin, retourner. Leurs trois côtés sont alors de même longueur deux à deux, et leurs trois angles de même mesure deux à deux. Il ne suffit pas d'avoir la même forme, ni la même aire : **tout** doit coïncider.



A sur D, B sur E, C sur F

AB = DE, BC = EF, AC = DF

mêmes angles en A et en D, en B et en E, en C et en F

DEF a été retourné : il reste égal

DEF est ABC retourné puis tourné : le même codage marque les côtés et les angles qui se superposent.

DÉFINITION

Quand deux triangles égaux se superposent, chaque sommet de l'un vient sur un sommet de l'autre : ces sommets sont dits **homologues**, de même que les côtés et les angles qui se recouvrent. Deux côtés homologues ont la même longueur, deux angles homologues la même mesure. Un angle **fait face** à un côté du triangle : l'homologue d'un angle est l'angle qui fait face au côté homologue.

On écrit les deux triangles avec leurs sommets homologues **dans le même ordre** : « ABC et DEF sont égaux, avec A sur D, B sur E, C sur F ». Les égalités se lisent alors deux lettres par deux lettres : $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.

ASSOCIER LES SOMMETS HOMOLOGUES

1. Repérer, dans l'énoncé ou sur le codage, deux côtés de même longueur (ou deux angles de même mesure), un dans chaque triangle.
2. Le sommet qui **fait face** à un côté a pour homologue le sommet qui fait face au côté homologue.
3. Réécrire le second triangle dans l'ordre des homologues, puis lire les égalités deux par deux.

EXEMPLE

Les triangles ABC et RST sont égaux, avec $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 5$ cm, $RS = 6$ cm, $ST = 5$ cm et $RT = 7$ cm. Quel angle de RST a la même mesure que $\widehat{BAC}$?

1. $\widehat{BAC}$ fait face au côté $[BC]$, qui mesure 6 cm.
2. Dans RST, le côté de 6 cm est $[RS]$; l'angle qui lui fait face a pour sommet T : c'est $\widehat{RTS}$.
3. Contrôle avec les autres côtés : $AB = RT = 7$ cm et $AC = TS = 5$ cm. L'ordre homologue est ABC et TRS : A sur T, B sur R, C sur S.

$\widehat{RTS} = \widehat{BAC}$, et les triangles s'écrivent ABC et TRS dans l'ordre homologue

PIÈGE

Écrire $\widehat{BAC} = \widehat{RST}$, parce que A et R sont tous deux « le premier sommet ». — l'ordre des lettres dans l'énoncé n'a aucune raison de suivre la superposition : seules les longueurs et les angles décident.

Ce que ça coûte : une égalité fausse, et toute la suite de la démonstration repose dessus.

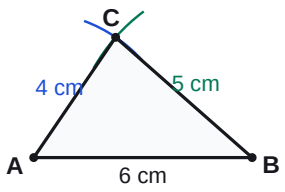
Le réflexe : chercher le côté qui fait face à l'angle, puis son homologue dans l'autre triangle.

2 Construire un triangle : trois données suffisent

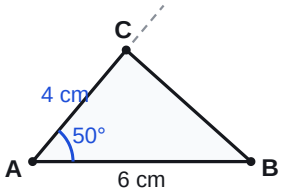
Rappels de 5e. On ne peut construire un triangle de côtés a, b et c, où c est le plus long, que si $c < a + b$: c'est l'**inégalité triangulaire**. Si $c = a + b$, les trois points sont alignés. Et la somme des trois angles d'un triangle vaut toujours 180°.

PROPRIÉTÉ

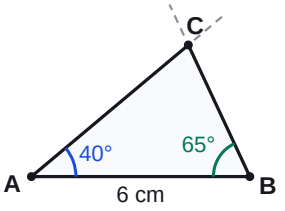
Chacune des trois données suivantes permet de construire un triangle, et **un seul**, à sa position près : tous ceux qui la reçoivent obtiennent des triangles superposables. **Trois longueurs**, la plus grande étant inférieure à la somme des deux autres. **Deux longueurs et l'angle qu'elles forment**, c'est-à-dire l'angle compris entre ces deux côtés. **Une longueur et les deux angles à ses extrémités**, dont la somme est inférieure à 180°. On le constate en construisant ; cette propriété est **admise**.



trois longueurs
au compas



deux longueurs
et l'angle qu'elles forment



une longueur
et les deux angles à ses extrémités

Trois façons de fixer un triangle. Les traits de construction restent visibles : arcs de compas, demi-droites tracées au rapporteur.

ÉCRIRE UN PROTOCOLE DE CONSTRUCTION

1. Faire une **figure à main levée** et y reporter toutes les données, codées.
2. Commencer par un **côté dont on connaît la longueur** : « Tracer le segment $[EF]$ de longueur 6 cm. »
3. Une instruction par ligne, avec un verbe d'action (tracer, placer, reporter) et l'instrument. Chaque point est **nommé** au moment où il apparaît.
4. Relire en se mettant à la place de quelqu'un qui n'a pas vu la figure : chaque instruction doit se suivre sans rien deviner.

EXEMPLE

Écrire un protocole de construction du triangle EFG tel que $EF = 6$ cm, $\widehat{FEG} = 40^\circ$ et $\widehat{EFG} = 65^\circ$. Quelle est la mesure de $\widehat{EGF}$?

1. Tracer le segment $[EF]$ de longueur 6 cm.
2. Au rapporteur, tracer la demi-droite d'origine E qui forme avec $[EF)$ un angle de 40°.
3. Du **même côté** de (EF), tracer la demi-droite d'origine F qui forme avec $[FE)$ un angle de 65°.
4. Les deux demi-droites se coupent en G : tracer le triangle EFG. La somme des angles vaut 180° : $180 - 40 - 65 = 75$

un protocole en quatre instructions, et $\widehat{EGF} = 75^\circ$

PIÈGE

Écrire « Tracer un angle de 40°, puis un angle de 65° », sans dire en quel sommet, à partir de quel côté, ni de quel côté de (EF). — le lecteur peut placer les angles ailleurs, ou de part et d'autre de (EF) : les demi-droites ne se coupent plus, ou le triangle n'est pas le bon.

Ce que ça coûte : le protocole ne décrit plus une seule figure : il ne remplit pas son rôle.

Le réflexe : pour chaque angle, donner son sommet, le côté de départ, et préciser « du même côté de (EF) ».

PIÈGE

Chercher à construire un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 8 cm, ou un triangle qui a deux angles de 100° et de 90°. — $8 > 3 + 4$: les deux arcs ne se coupent pas. $100^\circ + 90^\circ > 180^\circ$: les deux demi-droites ne se rencontrent pas.

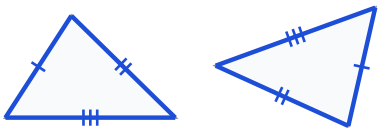
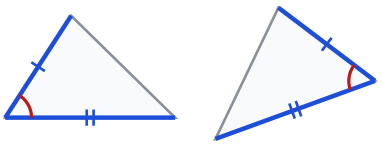
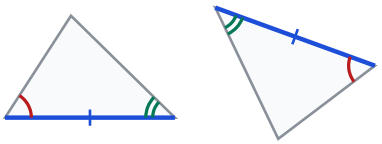
Ce que ça coûte : du temps perdu, ou une figure « forcée » rendue comme juste.

Le réflexe : contrôler les données avant de tracer : le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, et deux angles font moins de 180° à eux deux.

3 Les trois cas d'égalité des triangles

PROPRIÉTÉ

Propriété admise. Deux triangles sont égaux dans chacun des trois cas suivants. **1er cas** : leurs trois côtés sont de même longueur deux à deux. **2e cas** : ils ont un angle de même mesure, **compris** entre deux côtés de même longueur deux à deux. **3e cas** : ils ont un côté de même longueur, **compris** entre deux angles de même mesure deux à deux. Chaque cas traduit une construction de la partie précédente : ces données fixent le triangle, donc deux triangles qui les partagent se superposent.

1er cas	2e cas	3e cas
		
trois côtés de même mesure deux à deux	deux côtés et l'angle compris de même mesure deux à deux	un côté et ses deux angles de même mesure deux à deux

Ce que le codage doit montrer dans chacun des trois cas. Seuls les éléments codés sont connus ; le reste s'en déduit.

Le 3e cas sert aussi quand les deux angles connus ne sont pas aux extrémités du côté. La somme des angles valant 180°, deux triangles qui ont deux angles de même mesure deux à deux ont aussi le troisième. Il faut alors que le côté de même longueur soit **homologue** : il fait face au même angle dans les deux triangles.

Une symétrie axiale, une symétrie centrale ou une translation conservent les longueurs : l'image d'un triangle par l'une d'elles est un triangle **égal**. La symétrie axiale le retourne, les deux autres non.

CHOISIR LE CAS D'ÉGALITÉ

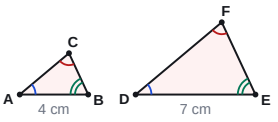
1. Nommer les deux triangles et chercher **trois** égalités, chacune justifiée : énoncé, codage, **côté commun**, angles **opposés par le sommet**, angles **alternes-internes** formés par des parallèles.
2. Trois côtés : 1er cas. Deux côtés et un angle : vérifier que le sommet de l'angle est l'**extrémité commune** des deux côtés (2e cas). Un côté et deux angles : vérifier que les angles sont aux **deux extrémités** du côté, ou calculer le troisième angle (3e cas).
3. Trois angles seulement, ou un angle qui n'est pas compris : **aucune conclusion**. Chercher une autre égalité.

PIÈGE

« Les deux triangles ont des angles de 40°, 65° et 75° : ils sont égaux. » — un triangle agrandi garde ses angles, mais pas ses longueurs : trois angles fixent la forme, pas la taille.

Ce que ça coûte : la conclusion est fausse, et les longueurs qu'on en déduit aussi.

Le réflexe : exiger au moins **un côté** parmi les trois égalités.



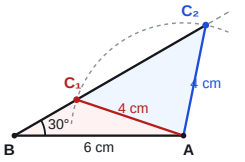
Mêmes angles, mais $AB = 4$ cm et $DE = 7$ cm : ces triangles ne sont pas égaux.

PIÈGE

« $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 30^\circ$ dans les deux triangles : c'est le 2e cas. » — l'angle de 30° a pour sommet B : il n'est pas compris entre $[AB]$ et $[AC]$, qui se rejoignent en A. Avec ces données, deux triangles différents existent.

Ce que ça coûte : le cas d'égalité ne s'applique pas : la démonstration n'aboutit pas, et sa conclusion peut être fausse.

Le réflexe : le sommet de l'angle doit être le point commun aux deux côtés.



Le cercle de centre A et de rayon 4 cm coupe deux fois la demi-droite issue de B : ABC_1 et ABC_2 ont les mêmes données, et ne sont pas égaux.

4 Démontrer avec des triangles égaux

DÉMONTRER QUE DEUX LONGUEURS OU DEUX ANGLES SONT ÉGAUX

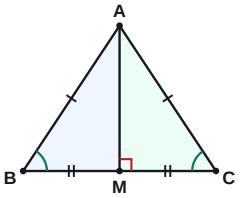
1. Repérer **deux triangles** qui contiennent chacun l'un des deux éléments à comparer.
2. **On sait que** … : trois égalités, chacune justifiée. **Or** … : le cas d'égalité, énoncé. **Donc** les deux triangles sont égaux.
3. Écrire les sommets homologues, puis conclure : les éléments cherchés sont **homologues**, donc de même longueur ou de même mesure.

EXEMPLE

ABC est un triangle isocèle en A et M est le milieu de $[BC]$. Démontrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, puis que la droite (AM) est perpendiculaire à (BC).

1. **On sait que** $AB = AC$ (triangle isocèle en A), $BM = CM$ (M milieu de $[BC]$), et $[AM]$ est un **côté commun** aux triangles ABM et ACM.
2. **Or** deux triangles dont les trois côtés sont de même longueur deux à deux sont égaux (1er cas). **Donc** ABM et ACM sont égaux, avec A sur A, B sur C, M sur M.
3. Les angles homologues ont la même mesure : $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$, c'est-à-dire $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$; et $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$.
4. B, M et C sont alignés, donc $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$. Ces deux angles étant égaux, chacun mesure :
   $180 \div 2 = 90$

les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, et $(AM) \perp (BC)$: (AM) est la médiatrice de $[BC]$



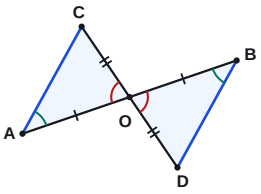
Le côté $[AM]$ appartient aux deux triangles : c'est la troisième égalité, celle qu'on oublie d'écrire.

EXEMPLE

Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont le même milieu O, et $AC = 3{,}5$ cm. Démontrer que $BD = 3{,}5$ cm, puis que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

1. **On sait que** $OA = OB$ et $OC = OD$ (O est le milieu des deux segments), et $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (angles **opposés par le sommet**).
2. L'angle $\widehat{AOC}$ est compris entre $[OA]$ et $[OC]$, l'angle $\widehat{BOD}$ entre $[OB]$ et $[OD]$. **Or** deux triangles qui ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur deux à deux sont égaux (2e cas). **Donc** AOC et BOD sont égaux, avec A sur B, O sur O, C sur D.
3. Côtés homologues : $BD = AC = 3{,}5$ cm. Angles homologues : $\widehat{OAC} = \widehat{OBD}$.
4. Ces deux angles sont **alternes-internes** pour les droites (AC) et (BD) coupées par la sécante (AB). **Or** si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles. **Donc** $(AC) \parallel (BD)$.

$BD = 3{,}5$ cm et $(AC) \parallel (BD)$



Deux paires de côtés codés et les angles opposés par le sommet en O : le 2e cas s'applique.

PIÈGE

Écrire « AOC et BOD sont égaux, car $OA = OB$ et $OC = OD$ » : deux égalités seulement. — aucun cas d'égalité ne se contente de deux éléments : il en faut trois, dont au moins un côté.

Ce que ça coûte : le cas d'égalité est cité sans ses conditions : la démonstration est incomplète.

Le réflexe : compter les égalités avant d'écrire « Or » : trois, chacune avec sa justification, y compris le côté commun ou les angles opposés par le sommet.

À VÉRIFIER

- Mes trois égalités sont-elles toutes justifiées : énoncé, codage, côté commun, angles opposés par le sommet ?
- Ai-je au moins un côté ? 2e cas : l'angle est-il **entre** les deux côtés ? 3e cas : les angles sont-ils aux extrémités du côté ?
- Ai-je écrit les sommets homologues dans le même ordre avant de conclure ?
- Mon protocole donne-t-il, pour chaque point, l'instrument et ce qui le place ?

À RETENIR

- Deux triangles **égaux** sont superposables : leurs côtés et leurs angles homologues sont égaux deux à deux.
- Un angle et son homologue **font face** à deux côtés homologues : on écrit les sommets homologues dans le même ordre.
- Les trois cas, admis : **trois côtés** ; **deux côtés et l'angle compris** ; **un côté et les deux angles à ses extrémités**.
- Trois angles ne suffisent pas, ni deux côtés et un angle **non compris** entre eux.
- Démontrer : on sait que (trois égalités justifiées), or (le cas d'égalité), donc les triangles sont égaux ; puis on lit les éléments homologues.
- Protocole : un côté d'abord, une instruction par ligne, chaque point nommé au moment où il apparaît.