COURS

Calcul littéral — Formules, substitution et premières équations

5e

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 18 février 2026, BO n° 10 du 5 mars 2026

En 5e, une lettre prend la place d'un nombre : pour écrire une formule, démontrer une propriété ou désigner le nombre cherché. **Une lettre est un nombre : tout ce qui se fait avec un nombre — le remplacer, calculer, démontrer, le retrouver — se fait avec elle.**

1 Des mots aux formules

DÉFINITION

Une **expression littérale** est un calcul dans lequel des lettres désignent des nombres. Dans $3n + 1$, la lettre n est une **variable** : on peut la remplacer par n'importe quel nombre, et l'expression donne un résultat pour chacun. **On supprime le signe × devant une lettre ou une parenthèse**, jamais entre deux nombres : $2 \times n = 2n$, $a \times b = ab$, $3 \times (x + 1) = 3(x + 1)$; on écrit $5n$ plutôt que $n \times 5$, et x plutôt que $1x$. Attention : $n^2 = n \times n$ n'est pas $2n$.

le double	le triple	la moitié	le carré	le successeur	le prédécesseur
2*n*	**3*n***	***n* ÷ 2**	***n*²**	***n* + 1**	***n* − 1**

Pour un nombre n (entier pour le successeur et le prédécesseur), chaque mot devient un calcul.

PRODUIRE UNE FORMULE : L'EXEMPLE DU RECTANGLE

1. **Dire le calcul sur un cas connu.** Un rectangle de 5 sur 3 : son tour fait $5 + 3 + 5 + 3 = 16$ et son aire 5 × 3 = 15.
2. **Remplacer les nombres par des lettres**, puis alléger l'écriture. $P = L + l + L + l = 2L + 2l$ $\quad A = L \times l$
3. **Contrôler** sur le cas connu : pour $L = 5$ et $l = 3$, $2 \times 5 + 2 \times 3 = 16$ une formule qui ne redonne pas un résultat connu est fausse.



P = 2*L* + 2*l*
A = *L* × *l*

Deux formules pour une infinité de rectangles.

PIÈGE

Traduire « le triple du successeur de n » par $3n + 1$. — le triple du successeur ajoute 1 **d'abord** : $3(n + 1)$. Pour $n = 4$: 15, contre 13.

Ce que ça coûte : La formule, et tous les calculs qui en dépendent.

Le réflexe : ce qui est dit en dernier (« du successeur ») se calcule en premier : il va entre parenthèses.

2 Les suites de motifs

DÉFINITION

Dans une **suite de motifs évolutive**, chaque étape se construit à partir de la précédente selon une règle régulière.

une allumette de départ (en bleu), puis 3 allumettes pour chaque carré



étape 1
4 allumettes

étape 2
7 allumettes

étape 3
10 allumettes

étape 1 : 1 + 3 × 1 = 4
étape 2 : 1 + 3 × 2 = 7
étape 3 : 1 + 3 × 3 = 10

étape *n* : 1 + 3*n*

La formule de l'étape n permet d'atteindre toute étape sans la dessiner.

TROUVER LA FORMULE D'UN MOTIF

1. **Compter et repérer la régularité** : 4, 7, 10 ; d'une étape à la suivante, on ajoute 3 allumettes.
2. **Repérer la structure** : 1 allumette dès le départ, puis 3 par carré, répétées n fois. D'où $1 + 3n$, qu'on écrit aussi $3n + 1$.
3. **Contrôler** sur une étape déjà comptée : pour $n = 3$,
   $1 + 3 \times 3 = 10$
4. **Utiliser** la formule, sans rien dessiner : à l'étape 100,
   $1 + 3 \times 100 = 301$
   il faut 301 allumettes.

PIÈGE

Annoncer $4 \times 100 = 400$ allumettes, parce qu'un carré en demande 4. — les carrés voisins **partagent** une allumette : chaque nouveau carré n'en ajoute que 3.

Ce que ça coûte : La formule, et toutes les étapes demandées.

Le réflexe : tester la formule sur l'étape 2, sous les yeux : $4 \times 2 = 8$, or on compte 7.

3 Remplacer une lettre par un nombre

CALCULER UNE EXPRESSION PAR SUBSTITUTION

1. **Rétablir les signes × cachés** : $3x + 7$ s'écrit $3 \times x + 7$.
2. **Remplacer** chaque lettre par sa valeur, sans rien changer d'autre.
3. **Calculer en respectant les priorités** : multiplier avant d'ajouter. Pour $x = 2{,}5$:
   $3 \times 2{,}5 + 7 = 7{,}5 + 7 = 14{,}5$

PIÈGE

Pour $x = 4$, écrire que $3x$ vaut 34. — $3x$ signifie $3 \times x$: le signe × est caché, il n'a pas disparu. $3 \times 4 = 12$.

Ce que ça coûte : Le résultat, et tout ce qui est calculé ensuite avec lui.

Le réflexe : toujours rétablir le × avant de remplacer la lettre.

RÈGLE

Tester une égalité. Une égalité entre deux expressions qui contiennent x peut être **vraie pour certaines valeurs** de x et **fausse pour d'autres**. Pour la tester, on calcule **séparément** chaque membre, puis on compare. « = » n'y nomme plus un calcul : c'est une **affirmation**, vraie ou fausse.

EXEMPLE

L'égalité $4x + 3 = 6x - 1$ est-elle vraie pour $x = 2$? Pour $x = 3$?

1. Pour $x = 2$, les deux membres, calculés à part, sont égaux :
   $4 \times 2 + 3 = 11 \quad \text{et} \quad 6 \times 2 - 1 = 11$
2. Pour $x = 3$, ils sont différents :
   $4 \times 3 + 3 = 15 \quad \text{et} \quad 6 \times 3 - 1 = 17$

vraie pour $x = 2$, fausse pour $x = 3$: elle n'est pas vraie pour tous les nombres

4 Somme ou produit ; développer, factoriser, réduire

DÉFINITION

Une expression est une **somme** (ou une différence) si la **dernière opération** à effectuer, en respectant les priorités, est une addition (ou une soustraction). C'est un **produit** si la dernière opération est une multiplication. Ainsi $3x + 5$ est une somme, et $3(x + 5)$ un produit.

$3 \times x \oplus 5$ **somme**
dernière opération : +

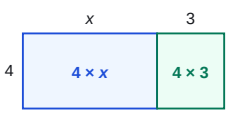
$3 \otimes (x + 5)$ **produit**
dernière opération : ×

Rétablir les × : la dernière opération se voit.

PROPRIÉTÉ

La distributivité. Pour tous nombres k, a et b : lue de gauche à droite, l'égalité **développe** (un produit devient une somme) ; lue de droite à gauche, elle **factorise** (une somme devient un produit). Exemple : $2{,}5(x - 4) = 2{,}5 \times x - 2{,}5 \times 4 = 2{,}5x - 10$.

$$k(a + b) = ka + kb \qquad k(a - b) = ka - kb$$



$4(x + 3) = 4x + 12$
un grand rectangle = deux petits

L'aire se calcule en un morceau ou en deux : même résultat.

FACTORISER UNE SOMME

1. **Faire apparaître le facteur commun** dans chaque terme.
   $6x + 18 = 6 \times x + 6 \times 3$
2. **L'écrire devant une parenthèse**, avec ce qui reste dedans.
   $6 \times x + 6 \times 3 = 6(x + 3)$
3. **Contrôler en redéveloppant** : $6(x + 3) = 6x + 18$.
   si le facteur commun est le terme entier, il reste 1 : 7x + 7 = 7 × x + 7 × 1 = 7(x + 1).

RÈGLE

Réduire, c'est écrire une expression sous la forme la plus courte $ax + b$: on regroupe les termes en x entre eux, et les nombres entre eux. Les termes en x se regroupent par la distributivité : $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.

EXEMPLE

Réduire $B = 2{,}5x + 4 + x + 1{,}5$.

1. Le terme x compte pour $1x$. On regroupe les x, puis les nombres.
   $B = 2{,}5x + 1x + 4 + 1{,}5 = 3{,}5x + 5{,}5$

$B = 3{,}5x + 5{,}5$ **(contrôle pour $x = 2$: 12,5 des deux côtés)**

PIÈGE

Développer $3(x + 5)$ en $3x + 5$. — le 3 multiplie **toute** la parenthèse. Test pour $x = 1$: $3 \times 6 = 18$, mais $3 + 5 = 8$.

Ce que ça coûte : Le développement et toute la suite.

Le réflexe : tracer une flèche depuis le 3 vers chaque terme : $3x + 15$.

PIÈGE

Réduire $4x + 2$ en $6x$. — un terme en x et un nombre ne se regroupent pas : $4x + 2$ est déjà réduite. Pour $x = 0$: 2 contre 0.

Ce que ça coûte : La réduction, souvent toute la question.

Le réflexe : trier en deux tas : les x d'un côté, les nombres de l'autre.

PIÈGE

Écrire $x + x = x^2$. — $x + x$ est le double de x, soit $2x$; x^2 est $x \times x$. Pour $x = 3$: 6 contre 9.

Ce que ça coûte : La réduction, et les calculs qui suivent.

Le réflexe : une addition de x se compte : $x + x + x = 3x$.

5 Démontrer ou réfuter

RÈGLE

Pour démontrer qu'une propriété est **vraie pour tous les nombres**, des exemples ne suffisent pas : on raisonne avec une **lettre**, qui représente n'importe quel nombre. Pour démontrer qu'elle est **fausse**, **un seul contre-exemple** suffit : « pour tout x, $2x + 3 = 5x$ » est faux, car pour $x = 2$ on obtient 7 et 10 ($x = 1$, qui donne 5 et 5, ne réfute rien). Un **tableur** ou un programme (Scratch) fait vite beaucoup d'essais : il aide à formuler une **conjecture**, affirmation que l'on croit vraie sans l'avoir démontrée.

D3	=A3+B3+C3

	A	B	C	D
1	***n***	***n* + 1**	***n* + 2**	**somme**
2	1	2	3	**6**
3	2	3	4	**9**
4	3	4	5	**12**

on lit la colonne D :
6 ; 9 ; 12…

conjecture : la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3

trois essais ne prouvent rien :
seul le calcul littéral démontre

Le tableur suggère la conjecture ; la démonstration reste à faire.

EXEMPLE

Démontrer que la somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

1. Soit n le plus petit des trois, un entier **quelconque** : les suivants sont $n + 1$ et $n + 2$. On réduit la somme.
   $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$
2. On factorise par 3 : 3 fois un entier est un multiple de 3.
   $3n + 3 = 3(n + 1)$

la somme vaut $3(n + 1)$: un multiple de 3 pour tout entier n — le triple du nombre du milieu

PIÈGE

Conclure « toujours vrai » après quelques essais, même au tableur. — les essais rendent la propriété **probable**, pas certaine.

Ce que ça coûte : La démonstration demandée : il ne reste que la conjecture.

Le réflexe : essais → conjecture ; lettre → démonstration. Un contre-exemple, lui, doit rendre l'affirmation **fausse**.

6 La lettre inconnue : les équations $ax = c$ et $x + b = c$

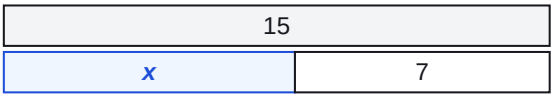
DÉFINITION

Quand une lettre désigne **un nombre précis que l'on cherche**, c'est une **inconnue**. Une égalité qui contient une inconnue est une **équation** ; la **résoudre**, c'est trouver la valeur qui la rend vraie, la **solution**.

RÈGLE

Chaque opération se défait par son opération inverse. Ajouter b se défait en soustrayant b ; multiplier par a (non nul) se défait en divisant par a ; diviser par a se défait en multipliant par a. Ainsi $x + b = c$ donne $x = c - b$, $ax = c$ donne $x = c \div a$, $\frac{x}{4} = 3$ donne $x = 3 \times 4 = 12$, et $2x = 0$ donne $x = 0 \div 2 = 0$.

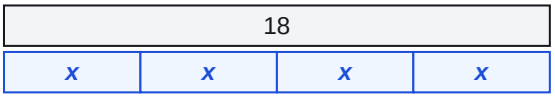
x + 7 = 15



x = 15 − 7 = 8

on défait « + 7 » en soustrayant 7

4x = 18



x = 18 ÷ 4 = 4,5

on défait « × 4 » en divisant par 4

Le schéma en barres montre l'opération inverse avant tout calcul.

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION PAR L'OPÉRATION INVERSE

1. **Lire l'opération à trou, puis la défaire.** $x + 7 = 15$: quel nombre, augmenté de 7, donne 15 ? On retire 7 : $x = 8$.
2. **Vérifier** en remplaçant x par 8 dans l'équation de départ.
   $8 + 7 = 15$
3. **Conclure par une phrase** : la solution est 8.

EXEMPLE

Résoudre $3x = 7$.

1. On divise 7 par 3, mais $7 \div 3$ ne tombe pas juste : la solution est le **nombre quotient** $\frac{7}{3}$, le nombre qui, multiplié par 3, donne 7.
   $3 \times \frac{7}{3} = 7$
   2,33 n'en est qu'une valeur approchée : 3 × 2,33 = 6,99.

la solution est $\frac{7}{3}$

PIÈGE

Résoudre $4x = 20$ par $x = 20 - 4 = 16$, ou $x + 6 = 14$ par $x = 14 + 6 = 20$. — le 4 **multiplie** x : on divise, $x = 5$. Et « + 6 » se défait en retirant 6 : $x = 8$.

Ce que ça coûte : La solution, donc la question.

Le réflexe : vérifier : $4 \times 16 = 64$ et $20 + 6 = 26$ trahissent l'erreur.

Au IX^{e} siècle, à Bagdad, **Al-Khwarizmi** nommait « la chose » le nombre cherché : c'est notre inconnue. Il distinguait $x + b = c$ (l'*al-jabr*, qui a donné « algèbre ») et $ax = c$ (l'*al-hatt*).

À VÉRIFIER

- Ai-je **contrôlé ma formule** ou mon calcul sur une valeur dont je connais le résultat ?
- En développant, le facteur multiplie-t-il **chaque terme** de la parenthèse ?
- Pour démontrer : ai-je raisonné avec une **lettre** ? Pour réfuter : mon contre-exemple rend-il les deux membres **différents** ?
- Pour une équation : ai-je pris l'opération **inverse**, **vérifié** la solution et conclu par une **phrase** ?

À RETENIR

- $2n$ **signifie** $2 \times n$, n^2 signifie $n \times n$: on rétablit les × avant de remplacer une lettre.
- $k(a + b) = ka + kb$: développer change un produit en somme, factoriser fait l'inverse.
- **Réduire** : les x avec les x, les nombres avec les nombres — $4x + 2$ est déjà réduite.
- Des exemples ne démontrent rien ; **un seul contre-exemple** suffit à réfuter.
- $x + b = c$ donne $x = c - b$; $ax = c$ donne $x = c \div a$ — et **on vérifie** en remplaçant.