COURS

Parallélogrammes — Propriétés, cas particuliers et aire

5e

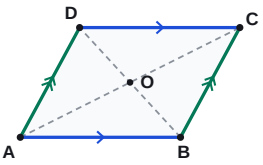
Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 18 février 2026, BO n° 10 du 5 mars 2026

Un parallélogramme se reconnaît de trois façons : côtés opposés parallèles, côtés opposés de même longueur, ou diagonales de même milieu. **Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, une seule de ces trois propriétés suffit — à condition de la lire dans l'énoncé ou sur le codage, jamais sur l'allure du dessin.** Rectangle, losange et carré en sont des cas particuliers, et l'aire de tous se calcule de la même façon : base × hauteur.

1 Définir et reconnaître un parallélogramme

DÉFINITION

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les **côtés opposés sont parallèles deux à deux**. Ses sommets se nomment dans l'ordre du tour : dans $ABCD$, $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$. Ses **diagonales** relient les sommets non consécutifs : ce sont $[AC]$ et $[BD]$.

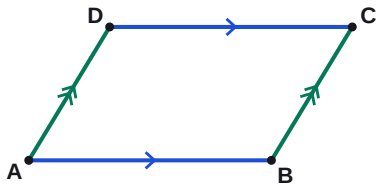


Même couleur, même chevron : côtés opposés parallèles.

PROPRIÉTÉ

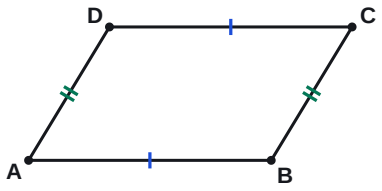
Si un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses côtés opposés ont la même longueur deux à deux, et ses diagonales ont le même milieu O. Ce point O est le **centre de symétrie** du parallélogramme : le demi-tour de centre O échange A et C, B et D — c'est de lui que viennent ces propriétés. Elles sont **caractéristiques** : elles marchent aussi dans l'autre sens. **Si** un quadrilatère **non croisé** a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, **alors** c'est un parallélogramme. **Si** un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, **alors** c'est un parallélogramme.

Définition



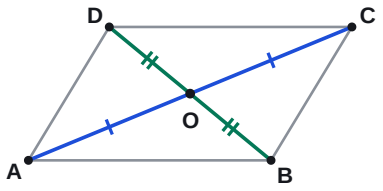
côtés opposés parallèles
(AB) // (DC) et (AD) // (BC)

Propriété caractéristique



côtés opposés de même longueur
AB = DC et AD = BC, non croisé

Propriété caractéristique



diagonales de même milieu
O milieu de [AC] et de [BD]

La définition et les deux propriétés caractéristiques : trois portes d'entrée vers la même conclusion.

DÉMONTRER EN TROIS TEMPS : ON SAIT QUE… OR… DONC

1. **On sait que** … : les données de l'énoncé ou du codage — jamais l'allure du dessin, jamais une mesure.
2. **Or** … : la propriété du cours, sous la forme « si … alors … », choisie d'après les données : des **parallèles** → la définition ; des **longueurs de côtés** → les côtés opposés ; des **milieux** → les diagonales.
3. **Donc** … : la partie « alors » de la propriété, appliquée à la figure.

EXEMPLE

Les segments $[KM]$ et $[LN]$ se coupent en P, avec $PK = PM$ et $PL = PN$. Démontrer que $KLMN$ est un parallélogramme, puis, sachant que $KL = 4$ cm, en déduire MN.

1. **On sait que** P est le milieu de $[KM]$ et de $[LN]$, qui relient des sommets non consécutifs de $KLMN$: ce sont ses diagonales.
2. **Or** si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme. **Donc** $KLMN$ est un parallélogramme.
3. Maintenant démontré, « parallélogramme » devient une **donnée**, et la propriété directe s'applique : les côtés opposés $[KL]$ et $[MN]$ ont la même longueur.

$KLMN$ est un parallélogramme, et $MN = KL = 4$ cm

PIÈGE

Affirmer que $ABCD$ est un parallélogramme « parce qu'il en a l'air », ou le « prouver » à la règle. — un dessin peut tromper et une mesure n'est jamais exacte : la mesure ne constitue pas une preuve.

Ce que ça coûte : toute la justification, même si la réponse est juste

Le réflexe : chercher l'information dans l'énoncé ou le codage. Si elle n'y est pas, c'est sans doute ce qu'il faut démontrer.

PIÈGE

Écrire : « $ABCD$ est un parallélogramme, donc ses diagonales ont le même milieu, donc c'est un parallélogramme. » — le raisonnement part de ce qu'il fallait démontrer : il tourne en rond. La propriété directe suppose la conclusion acquise.

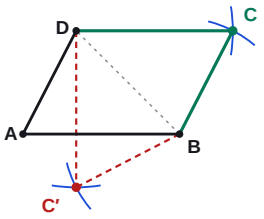
Ce que ça coûte : la démonstration entière

Le réflexe : pour **conclure** « parallélogramme », la propriété du « Or » se termine par « alors c'est un parallélogramme ».

2 Construire un parallélogramme

PLACER LE QUATRIÈME SOMMET C, CONNAISSANT A, B ET D

1. **Par la définition** (règle et équerre) : la parallèle à (AB) passant par D et la parallèle à (AD) passant par B se coupent en C.
2. **Par les côtés** (compas) : un arc de centre B et de rayon AD, un arc de centre D et de rayon AB. Garder l'intersection située **de l'autre côté de** (BD) par rapport à A.
3. **Par les diagonales** (règle graduée) : placer le milieu O de $[BD]$, puis C sur la demi-droite $[AO)$, au-delà de O, avec $OC = OA$. Dans tous les cas, laisser les traits de construction et **coder** la figure.



Deux arcs, deux points : C donne le parallélogramme, C' un quadrilatère croisé.

PIÈGE

Prendre le mauvais point d'intersection des arcs, C', et tracer le quadrilatère croisé $ABC'D$. — il a bien $AB = C'D$ et $AD = BC'$, mais il est croisé : la propriété des côtés opposés exige un quadrilatère non croisé.

Ce que ça coûte : la construction entière, et tout ce qui en dépend

Le réflexe : A et C de part et d'autre de (BD) ; les deux diagonales doivent se couper.

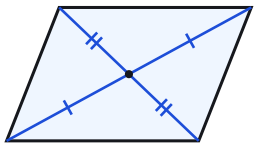
3 Rectangle, losange, carré

DÉFINITION

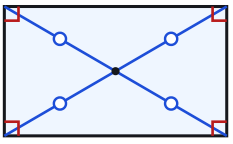
Un **rectangle** est un parallélogramme qui a **un angle droit** ; il en a alors quatre. Un **losange** est un parallélogramme qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** ; ses quatre côtés ont alors la même longueur. Un **carré** est à la fois un rectangle et un losange : tout carré est donc un rectangle, et un losange.

RÈGLE

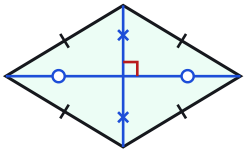
Pour un parallélogramme, les diagonales décident, dans les deux sens. Diagonales **de même longueur** : c'est un rectangle. Diagonales **perpendiculaires** : c'est un losange. Les deux : c'est un carré. Et un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur est un losange.



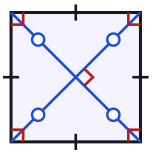
parallélogramme
côtés opposés parallèles
diagonales : même milieu



rectangle
+ un angle droit
même milieu, même longueur



losange
+ deux côtés consécutifs égaux
même milieu, perpendiculaires



carré
à la fois rectangle et losange
tout à la fois

Le même milieu pour les quatre ; la même longueur pour le rectangle ; l'angle droit au centre pour le losange ; tout pour le carré.

DÉTERMINER LA NATURE D'UN QUADRILATÈRE

1. **Parallélogramme ?** Le démontrer d'abord. Sans cette étape, rien de ce qui suit ne s'applique.
2. **Rectangle ?** Un angle droit, ou des diagonales de même longueur. **Losange ?** Deux côtés consécutifs de même longueur, ou des diagonales perpendiculaires.
3. **Les deux ?** C'est un carré. Si une condition manque, on s'arrête au dernier nom démontré.

EXEMPLE

Les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ de $EFGH$ se coupent en I, avec $IE = IG = 4$ cm, $IF = IH = 2{,}5$ cm et $(EG) \perp (FH)$. Nature de $EFGH$?

1. **On sait que** I est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$. **Or** un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. **Donc** $EFGH$ est un parallélogramme.
2. **On sait aussi que** $(EG) \perp (FH)$. **Or** un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange. **Donc** $EFGH$ est un losange.
3. Ses diagonales mesurent $2 \times 4 = 8$ cm et $2 \times 2{,}5 = 5$ cm : pas la même longueur, donc ce n'est ni un rectangle, ni un carré.

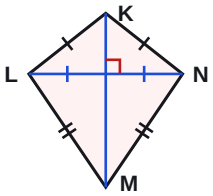
$EFGH$ est un losange, qui n'est pas un carré

PIÈGE

Conclure « losange » dès que les diagonales sont perpendiculaires, ou « rectangle » dès qu'elles ont la même longueur. — ces propriétés ne valent **que pour un parallélogramme**. Un cerf-volant a des diagonales perpendiculaires, un trapèze isocèle des diagonales de même longueur.

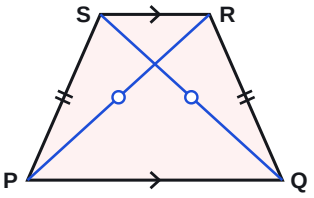
Ce que ça coûte : une conclusion fausse, et la démonstration avec

Le réflexe : deux étapes, toujours : d'abord « parallélogramme », ensuite « losange » ou « rectangle ».



un cerf-volant

diagonales perpendiculaires… mais pas de même milieu



un trapèze isocèle

diagonales de même longueur… mais pas de même milieu

Deux quadrilatères qui ne sont pas des parallélogrammes : leurs diagonales n'ont pas le même milieu.

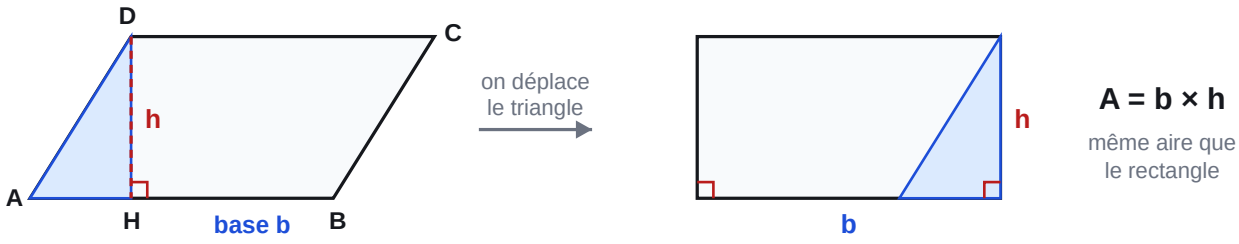
DÉFINITION

Un **trapèze** est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles. Un **pentagone** a 5 côtés, un **hexagone** 6. Dans une figure complexe, on compte les **sommets** : un point situé sur un côté, aligné avec ses deux voisins, n'en est pas un. Et on lit le **codage** : même signe sur deux segments, même longueur ; petit carré, angle droit ; mêmes chevrons, droites parallèles. Un angle qui « a l'air » droit sans petit carré ne l'est pas forcément.

4 Aire du parallélogramme et des figures complexes

RÈGLE

Aire d'un parallélogramme = base × hauteur associée. La **hauteur** associée à un côté, la **base**, est la distance entre ce côté et le côté opposé, mesurée **perpendiculairement**. Un triangle découpé d'un côté et recollé de l'autre donne un rectangle de même base, de même hauteur, donc de même aire.



Rien n'est ajouté, rien n'est perdu : le parallélogramme et le rectangle ont la même aire.

PIÈGE

Base 7,5 cm, hauteur 4 cm, côté oblique 5 cm : calculer $7{,}5 \times 5 = 37{,}5$ cm² au lieu de $7{,}5 \times 4 = 30$ cm². — le côté oblique est plus long que la hauteur : le résultat est trop grand. Seule une longueur **perpendiculaire** à la base donne l'aire.

Ce que ça coûte : le résultat, et le point de la formule

Le réflexe : repérer le petit carré : la hauteur forme toujours un angle droit avec la base.

CALCULER L'AIRE D'UNE FIGURE COMPLEXE

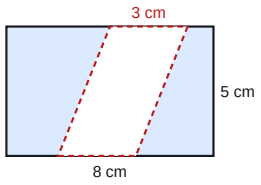
1. **Découper** la figure en figures usuelles, ou la **compléter** en une figure simple dont on retirera ensuite le morceau ajouté.
2. Mettre toutes les longueurs **dans la même unité**, puis calculer chaque aire : rectangle $L \times \ell$, parallélogramme $b \times h$, triangle $b \times h \div 2$.
3. **Additionner** les morceaux, ou **soustraire** ce qui a été retiré ; conclure avec une unité d'aire.

EXEMPLE

Un drapeau de 8 cm sur 5 cm est traversé, d'un grand côté à l'autre, par une bande blanche en forme de parallélogramme de base 3 cm. Aire de la partie colorée ?

1. Le rectangle mesure $8 \times 5 = 40$ cm². La bande a pour base 3 cm et pour hauteur la distance entre les grands côtés, 5 cm : on la retire.
   $40 - 3 \times 5 = 40 - 15 = 25$

la partie colorée mesure 25 cm²



Le grand rectangle, moins la bande.

5 Convertir des longueurs et des aires

RÈGLE

Entre deux unités de **longueur** voisines, le rapport est **10** : 1 m = 10 dm = 100 cm. Entre deux unités d'**aire** voisines, il est **100** : un carré de 1 m de côté se découpe en 10 × 10 carrés de 1 dm de côté, donc 1 m² = 100 dm² = 10 000 cm².

km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
			3	, 5 0	0 0	

hectare (ha) are (a)

3,5 m² = 350 dm² = 35 000 cm²

Deux colonnes par unité d'aire ; l'hectare vaut 1 hm², soit 10 000 m².

EXEMPLE

Une étiquette en forme de parallélogramme a une base de 1,2 dm et une hauteur associée de 45 mm. Aire en cm², puis en m² ?

1. Même unité d'abord : 1,2 dm = 12 cm et 45 mm = 4,5 cm. L'aire vaut $12 \times 4{,}5 = 54$ cm², et comme 1 m² = 10 000 cm² : $54 \div 10\,000 = 0{,}0054$

54 cm², soit 0,0054 m²

PIÈGE

Convertir une aire comme une longueur : écrire 3,5 m² = 350 cm², ou, sur un plan à l'échelle 1/1 000, multiplier l'aire du plan par 1 000. — une aire est le produit de deux longueurs, et chacune est convertie : ×100 par rang au lieu de ×10 (3,5 m² = 35 000 cm²), et ×1 000 × 1 000 sur le plan.

Ce que ça coûte : le résultat, et toute la suite du problème

Le réflexe : dans le doute, convertir d'abord les **longueurs**, puis calculer l'aire avec elles.

À VÉRIFIER

- Mes données viennent-elles de l'énoncé et du codage, pas du dessin ?
- Pour conclure « losange » ou « rectangle », ai-je d'abord démontré « parallélogramme » ?
- Ma construction est-elle non croisée, codée, avec ses traits de construction ?
- Ma hauteur est-elle perpendiculaire à ma base, et mes aires converties par 100 ?

À RETENIR

- **Parallélogramme** : quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Pour le démontrer : la définition, les **côtés opposés de même longueur** (non croisé) ou les **diagonales de même milieu**.
- **Rectangle** : un angle droit, ou des diagonales de même longueur. **Losange** : deux côtés consécutifs égaux, ou des diagonales perpendiculaires. **Carré** : les deux.
- Les diagonales ne décident qu'**après** « parallélogramme » : cerf-volant et trapèze isocèle sont des pièges.
- Aire = **base × hauteur associée**, jamais base × côté oblique.
- Longueurs : ×10 par rang. Aires : **×100** par rang ; 1 m² = 10 000 cm².