

COURS

Proportionnalité — Coefficient, pourcentages et vitesse

5^e

Programme du cycle 4 — BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

La proportionnalité est la notion la plus utilisée hors de l'école : recettes, remises, vitesses, échelles, taux de change. Toute la question tient en une phrase — **si l'un double, l'autre double-t-il aussi ?** Quand la réponse est non, aucune des règles de ce chapitre ne s'applique.

1 Reconnaître une situation proportionnelle

le coefficient est le même partout, ou la situation n'est pas proportionnelle

proportionnel			
kg	2	5	8
€	3	7,5	12
$3 \div 2 = 7,5 \div 5 = 12 \div 8 = 1,5$			

non proportionnel			
âge	2	5	8
cm	85	110	128
42,5 puis 22 puis 16 : rien ne colle			

un enfant de 8 ans ne mesure pas quatre fois un enfant de 2 ans

Le test se fait sur toutes les colonnes, jamais sur une seule.

DÉFINITION

Le nombre par lequel on multiplie chaque valeur de la première ligne pour obtenir celle de la seconde. Il est **le même pour toutes les colonnes** — c'est même la définition. Sur un graphique, la représentation est une **droite passant par l'origine**.

TROUVER UNE QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

- 1 Vérifier d'abord que la situation est bien proportionnelle. Sans cela, tout le reste est faux.
- 2 Écrire l'égalité des deux rapports, en gardant les mêmes grandeurs en haut et en bas.
mélanger les grandeurs — des kilos face à des euros — est l'erreur qui produit des résultats absurdes.
- 3 Faire le produit en croix, puis contrôler l'ordre de grandeur du résultat.

2 Pourcentages

RÈGLE

Prendre $t\%$ d'un nombre, c'est le multiplier par $\frac{t}{100}$. **Augmenter** de $t\%$ revient à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; **diminuer** de $t\%$, par $1 - \frac{t}{100}$.

$$+20\% : \times 1,2 \quad -30\% : \times 0,7$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Croire qu'une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ramène au prix de départ. — les deux pourcentages ne portent pas sur le même nombre. Un prix de 100 € devient 120 €, puis $120 \times 0,8 = 96$ € : il manque 4 €. La seconde remise s'applique à un montant plus élevé.

Le réflexe : toujours multiplier les coefficients : $1,2 \times 0,8 = 0,96$, soit une baisse nette de 4 %. Un pourcentage ne s'additionne jamais à un autre.

EXEMPLE

Un article coûte 80 €. Il subit une remise de 25 %, puis une seconde de 10 %.

- 1 Première remise :
 $80 \times 0,75 = 60$
- 2 Seconde remise, appliquée aux 60 € :
 $60 \times 0,9 = 54$
- 3 La remise globale n'est donc pas de 35 % :
 $0,75 \times 0,9 = 0,675$

54 €, soit une baisse de 32,5 %

RÈGLE

Une **réduction** — remise, rabais, solde — et une **augmentation** se calculent en un seul produit, jamais en deux temps. Une réduction de 25 % laisse 75 % du prix : on multiplie par 0,75. Une augmentation de 8 % porte à 108 % : on multiplie par 1,08. Ces nombres s'appellent des **coefficients multiplicateurs**, et leur intérêt apparaît dès qu'on enchaîne deux évolutions : il suffit alors de multiplier les coefficients entre eux.

$$\text{réduction de } t \% : \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

DÉFINITION

Une échelle est un **coefficient de proportionnalité** entre le plan et la réalité. Une échelle de $\frac{1}{25\,000}$ signifie que 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité, soit 250 m. Le calcul n'a rien de particulier : c'est une quatrième proportionnelle.

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

Deux pièges d'échelle. Le premier : convertir avant de comparer — une échelle est un rapport **sans unité**, donc les deux longueurs doivent être exprimées dans la même. Le second : une échelle plus grande donne une carte plus **détaillée** mais couvrant moins de terrain ; $\frac{1}{25\,000}$ est plus détaillée que $\frac{1}{100\,000}$.

3 Vitesse

RÈGLE

La vitesse moyenne est le quotient de la distance par la durée. Les trois formules se déduisent l'une de l'autre : il n'y en a qu'une à retenir.

$$v = \frac{d}{t} \quad d = v \times t \quad t = \frac{d}{v}$$

Les **unités doivent concorder** avant tout calcul. Une durée de 1 h 30 vaut 1,5 h et non 1,30 h — le temps se compte en base 60, pas en base 10. Convertir avant de calculer, jamais après : c'est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et elle donne des résultats qui semblent plausibles.

À VÉRIFIER

- Le coefficient est-il vraiment le même pour **toutes** les colonnes ?
- Mes deux rapports gardent-ils les mêmes grandeurs en haut et en bas ?
- Ai-je multiplié les coefficients plutôt qu'additionné les pourcentages ?
- 1 h 30 vaut **1,5 h** : mes durées sont-elles converties en décimal ?

À RETENIR

- Proportionnel = **même coefficient sur toutes les colonnes**, droite passant par l'origine.
- Dans une égalité de rapports, garder les **mêmes grandeurs** en haut et en bas.
- $+t \% : \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$. $-t \% : \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$.
- Deux pourcentages successifs se **multiplient**, ils ne s'additionnent pas.
- Un taux d'évolution se rapporte toujours à la valeur **de départ**.
- $v = \frac{d}{t}$, et **1 h 30 = 1,5 h** : convertir avant de calculer.