COURS

Perspective et patrons — Solides et aire du disque

5e

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 18 février 2026, BO n° 10 du 5 mars 2026

Un solide a trois dimensions, une feuille n'en a que deux : pour le représenter, il faut une convention. **En perspective cavalière, la face avant est dessinée en vraie grandeur, les arêtes fuyantes sont parallèles et réduites, et ce qu'on ne voit pas est en pointillés.** Le patron fait le chemin inverse : il déplie le solide à plat, toutes ses longueurs en vraie grandeur.

1 Les solides et leur vocabulaire

DÉFINITION

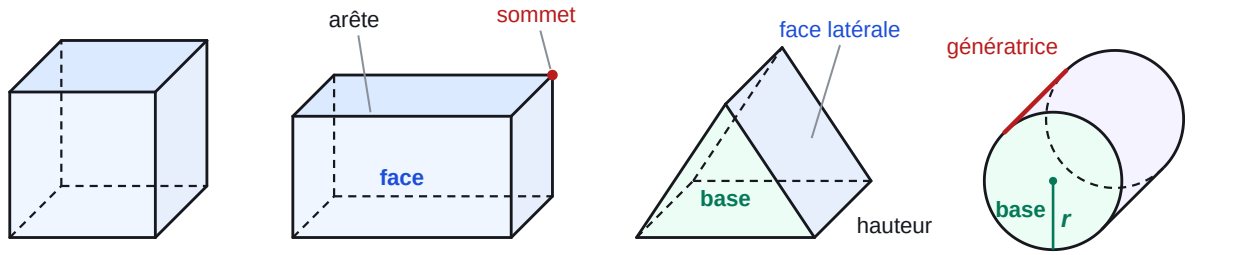
Les **faces** d'un solide le limitent ; deux faces se rencontrent le long d'une **arête**, les arêtes en des **sommets**. Un **pavé droit** a 6 faces rectangulaires, 12 arêtes et 8 sommets ; le **cube** est un pavé à 6 faces carrées.

DÉFINITION

Un **prisme droit** a deux **bases** : deux polygones superposables, situés dans des plans parallèles. Ses **faces latérales** sont des rectangles, perpendiculaires aux bases. La longueur d'une arête latérale est la **hauteur** du prisme. Un pavé droit est un prisme droit particulier, à bases rectangulaires.

DÉFINITION

Un **cylindre de révolution** a pour bases deux **disques** de même rayon r, dans des plans parallèles, l'un en face de l'autre, reliés par la **surface latérale**, courbe. Les segments qui joignent deux points correspondants des deux cercles sont les **génératrices** : elles sont perpendiculaires aux bases et ont pour longueur la **hauteur** h du cylindre.



cube
6 faces carrées

pavé droit
6 faces rectangulaires

prisme droit
bases : 2 triangles

cylindre de révolution
bases : 2 disques

Mêmes règles pour les quatre : face avant en vraie grandeur, fuyantes à 45° réduites de moitié. Les bases sont en couleur.

PIÈGE

Croire que la base d'un prisme est la face sur laquelle il est posé. — un prisme couché repose sur une face latérale ; ses bases sont les deux faces **superposables et parallèles** — ici, les triangles. Sa hauteur est alors horizontale.

Ce que ça coûte : un patron et une hauteur faux : la question est perdue, et le volume qui suit aussi.

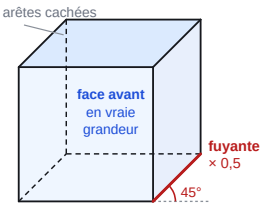
Le réflexe : chercher les deux faces identiques qui se font face : ce sont les bases.

Faces, sommets, arêtes : pour le pavé, $6 + 8 - 12 = 2$; pour le prisme à base triangulaire, $5 + 6 - 9 = 2$. Ce « 2 » n'est pas un hasard : c'est la **formule d'Euler**, $F + S - A = 2$, vraie pour tout solide à faces planes sans trou, dont les cinq **solides de Platon**.

2 La perspective cavalière

RÈGLE

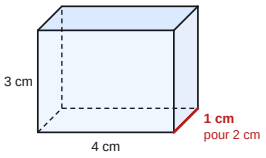
En perspective cavalière : **1.** les faces placées de face, parallèles à la feuille, sont dessinées **en vraie grandeur** ; **2.** les arêtes **fuyantes**, perpendiculaires à la feuille, sont dessinées **parallèles** entre elles, inclinées d'un même angle (souvent 45° ou 30°) et réduites d'un même **coefficient** (souvent 0,5) ; **3.** les arêtes **cachées** sont en **pointillés**. Le parallélisme est conservé, mais seuls les angles droits de la face avant restent droits sur le dessin.



Les trois règles sur un cube : 45°, coefficient 0,5.

DESSINER UN PAVÉ DE 4 CM × 3 CM × 2 CM (45°, COEFFICIENT 0,5)

1. Je dessine la face avant **en vraie grandeur** : un rectangle de 4 cm sur 3 cm.
2. Je calcule la longueur dessinée des fuyantes : la profondeur multipliée par le coefficient.
   $2 \times 0{,}5 = 1$
   les fuyantes mesurent 1 cm sur le dessin
3. Depuis chaque sommet de la face avant, je trace une fuyante de 1 cm, toutes **parallèles**, à 45° vers le haut à droite.
4. Je relie leurs extrémités : la face arrière est un rectangle identique à la face avant.
5. Je repasse en **pointillés** les trois arêtes qui partent du sommet arrière, en bas à gauche : on ne les voit pas.



Le pavé fini : la fuyante de 1 cm représente 2 cm.

EXEMPLE

Sur le dessin d'un pavé (45°, coefficient 0,5), la face avant mesure 5 cm sur 2 cm et les fuyantes 1,5 cm. Quelles sont les dimensions réelles du pavé ?

1. La face avant est en vraie grandeur ; les fuyantes ont été multipliées par 0,5, donc je divise par 0,5 :
   $1{,}5 \div 0{,}5 = 3$

le pavé mesure 5 cm × 2 cm × 3 cm

PIÈGE

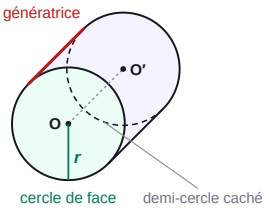
Mesurer une fuyante sur le dessin et la prendre pour une longueur réelle. — la fuyante est **réduite** : avec un coefficient 0,5, la longueur réelle est le double de la longueur dessinée. Les douze arêtes d'un cube sont égales, mais quatre sont dessinées deux fois plus courtes.

Ce que ça coûte : une dimension fausse du simple au double, et le patron, l'aire ou le volume qui en dépendent.

Le réflexe : ne lire en vraie grandeur que la face avant ; pour une fuyante, diviser par le coefficient.

DESSINER UN CYLINDRE COUCHÉ, BASES DE FACE

1. Je trace la base avant, de face donc en vraie grandeur : un **cercle** de centre O, de rayon r.
2. Je trace la fuyante $[OO']$, à 45°, de longueur $h \times 0{,}5$, puis un second cercle de même rayon et de centre O'.
3. Je trace les deux **génératrices** du contour, parallèles à $[OO']$ et tangentes aux deux cercles.
4. Je repasse en **pointillés** le demi-cercle arrière qui est derrière le cylindre.



Seule la base arrière a une moitié cachée ; la base avant est entière.

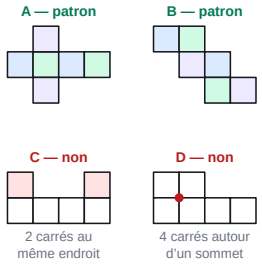
3 Les patrons

DÉFINITION

Un **patron** d'un solide est une figure plane, d'**un seul morceau**, qui, une fois découpée et pliée, recouvre exactement toutes les faces du solide, **sans trou ni chevauchement**. Toutes les longueurs y sont en vraie grandeur.

RECONNAÎTRE UN PATRON DE CUBE

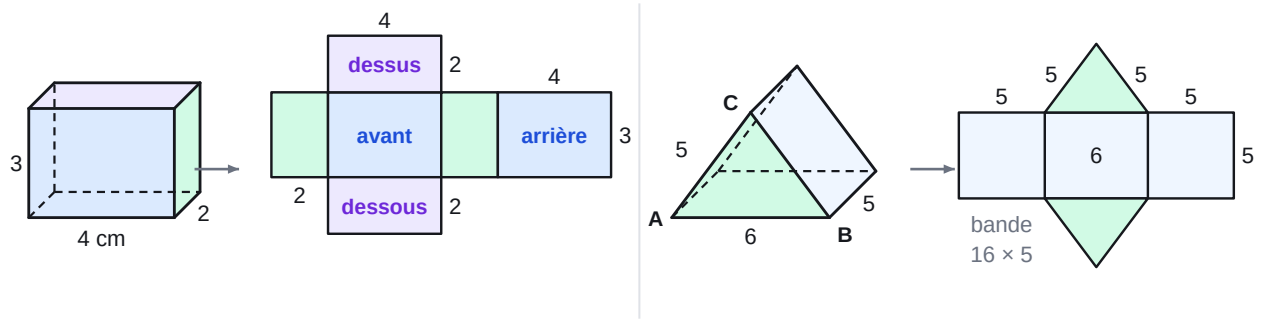
1. Il faut **exactement 6** carrés, sans **bloc de 2 sur 2** (4 faces autour d'un sommet : un cube n'en a que 3) ni 5 carrés alignés.
2. Je choisis un carré comme fond et je plie les autres en pensée, un par un. Deux carrés alignés et séparés par un seul carré deviennent des **faces opposées**.
3. Si deux carrés viennent se poser au même endroit, ce n'est pas un patron ; si chaque face a exactement une face opposée, c'en est un.



Même couleur = faces opposées.

PROPRIÉTÉ

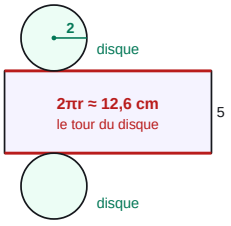
Patron d'un **pavé** : 6 rectangles identiques deux à deux. Patron d'un **prisme droit** : ses deux bases et un rectangle par côté de la base, de largeur la hauteur du prisme ; leur bande mesure le **périmètre de la base**. Deux bords qui se rejoignent au pliage ont **la même longueur**.



Même couleur = faces identiques. Les longueurs de la perspective se reportent sur le patron, en vraie grandeur.

PROPRIÉTÉ

Le **patron d'un cylindre** de révolution de rayon r et de hauteur h est formé de deux disques de rayon r et d'un rectangle de largeur h. Sa longueur est le **périmètre du cercle de base**, vu en 6e : $L = 2 \times \pi \times r$.



Pour r = 2 cm et h = 5 cm.

EXEMPLE

Quelles sont les dimensions du rectangle du patron d'un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 5 cm ?

1. Sa largeur est la hauteur du cylindre, 5 cm ; sa longueur est le périmètre du cercle de base : $2 \times \pi \times 2 = 4\pi \approx 12{,}6$

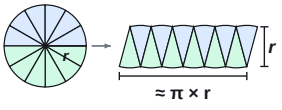
5 cm sur 4π cm, environ 12,6 cm — et non 4 cm, le diamètre : le rectangle fait le tour du disque

4 L'aire du disque

PROPRIÉTÉ

L'aire d'un disque de rayon r est égale à π multiplié par le carré du rayon. Elle s'exprime en unités d'**aire** : cm², m²…

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi \times r^2$$



aire ≈ π × r × r = π × r²

Tête-bêche, les parts forment presque un parallélogramme de base π × r (demi-périmètre) et de hauteur r.

CALCULER L'AIRE D'UN DISQUE

1. Je cherche le **rayon** : si l'énoncé donne le diamètre, je le divise par 2 — sinon, l'aire est quatre fois trop grande.
2. J'élève le rayon au carré : $r^2 = r \times r$, et non $r \times 2$.
3. Je multiplie par π : **valeur exacte** (25π), puis valeur approchée avec la touche π, en unité d'**aire**.

EXEMPLE

Une pizza de 30 cm de diamètre, ou deux pizzas de 20 cm de diamètre : laquelle des deux offres donne le plus de pizza ?

1. Grande pizza, rayon 15 cm :
   $\pi \times 15^2 = 225\pi \approx 706{,}9$
2. Deux pizzas de rayon 10 cm :
   $2 \times \pi \times 10^2 = 200\pi \approx 628{,}3$

la grande pizza : environ 706,9 cm² contre 628,3 cm²

PIÈGE

Confondre l'aire πr^2 et le périmètre $2\pi r$. — le périmètre est une **longueur** (cm), l'aire une **surface** (cm²). Pour $r = 3$ cm : périmètre $6\pi \approx 18{,}8$ cm, aire $9\pi \approx 28{,}3$ cm².

Ce que ça coûte : résultat et unité faux : la question est perdue.

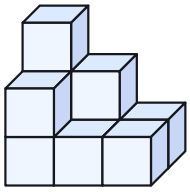
Le réflexe : aire → **carré** du rayon, et unité au carré ; périmètre → **2** fois le rayon, et unité simple.

Volumes (cylindre, cube, pavé, prisme) et unités : voir la fiche « Volumes — Pavés, prismes et cylindres ».

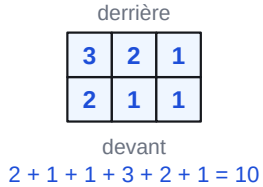
5 Empilements de cubes

COMPTER LES CUBES D'UN EMPILEMENT

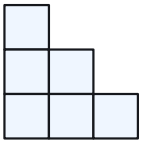
1. Je dessine la **vue de dessus** : une case par colonne de cubes, le devant en bas.
2. J'écris dans chaque case la **hauteur** de la colonne. Aucun cube ne flotte : les cubes cachés, qui portent ceux qu'on voit, comptent — les oublier est l'erreur classique.
3. J'additionne les nombres de toutes les cases.



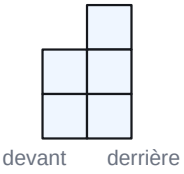
l'empilement



vue de dessus



vue de face



vue de droite

On voit 7 cubes, il y en a 10 : la vue de dessus, avec la hauteur de chaque colonne, permet de tout compter.

À VÉRIFIER

- Face avant en **vraie grandeur**, fuyantes **parallèles** ?
- Profondeur multipliée par le **coefficient** ?
- Arêtes cachées en **pointillés**, et seulement elles ?
- Bords qui se rejoignent au pliage de même longueur ?
- Rectangle du cylindre de longueur $2\pi r$?
- Aire du disque avec le **rayon**, en cm² ?

À RETENIR

- Perspective cavalière : face avant en **vraie grandeur**, fuyantes **parallèles** et **réduites**, arêtes cachées en **pointillés**.
- Sur un dessin, une fuyante ne se lit pas : on la **divise par le coefficient** pour retrouver la vraie longueur.
- Un patron : **un seul morceau**, sans trou ni chevauchement ; deux bords qui se rejoignent ont la même longueur.
- Patron du cylindre : deux disques de rayon r et un rectangle de largeur h et de longueur $2\pi r$.
- Aire du disque : $\mathcal{A} = \pi \times r^2$, avec le **rayon**, en unités d'**aire**.
- Empilement : la vue de dessus et la hauteur de chaque colonne, cubes cachés compris.