COURS

Symétrie centrale — Le demi-tour

5e

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 18 février 2026, BO n° 10 du 5 mars 2026

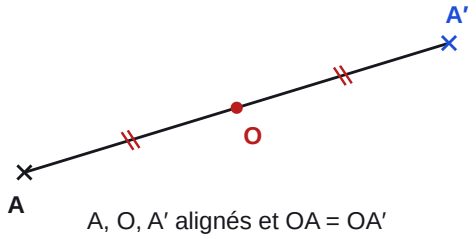
En 6e, on pliait la feuille le long d'un axe. En 5e, on la fait **tourner** : on pique une punaise en un point O et l'on fait pivoter un calque d'un demi-tour. C'est la symétrie centrale, et tout le chapitre tient dans une phrase : **A' est le symétrique de A par rapport à O lorsque O est le milieu du segment $[AA']$.**

1 Le symétrique d'un point

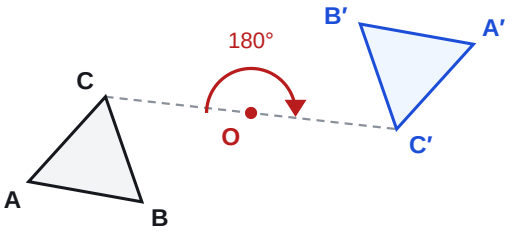
DÉFINITION

Soit O un point. Le **symétrique** du point A par rapport à O est le point A' tel que O est le **milieu** du segment $[AA']$. Concrètement : A, O et A' sont **alignés**, A' est **de l'autre côté** de O, et $OA' = OA$.

le point : O est le milieu de [AA′]



la figure : elle tourne d'un demi-tour autour de O



À gauche, un point et son symétrique. À droite, le triangle ABC et son image $A'B'C'$: chaque sommet a fait un demi-tour autour de O.

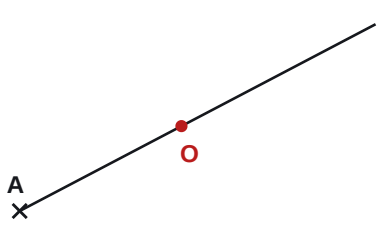
DÉFINITION

Transformer une figure par la **symétrie de centre O**, c'est remplacer chacun de ses points par son symétrique : on obtient son **image**, ou sa **symétrique**. C'est ce que donne un calque qu'on fait tourner d'un **demi-tour** (180°) autour de O, sans le retourner. Le centre O est le **seul point qui ne bouge pas** ; et si A' est le symétrique de A, alors A est celui de A'.

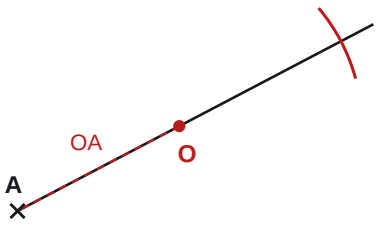
SUR FEUILLE BLANCHE, À LA RÈGLE ET AU COMPAS

1. Tracer la demi-droite $[AO)$: elle part de A, passe par O et se prolonge au-delà.
2. Pointer le compas en O et l'écarter jusqu'à A : l'écartement vaut OA.
3. Tracer un arc qui coupe la demi-droite **de l'autre côté de O** : c'est A'. Coder $OA' = OA$ par les mêmes petits traits.

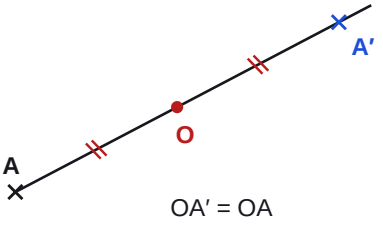
1. tracer la demi-droite [AO)



2. compas : pointe en O, rayon OA



3. A′ est sur la demi-droite

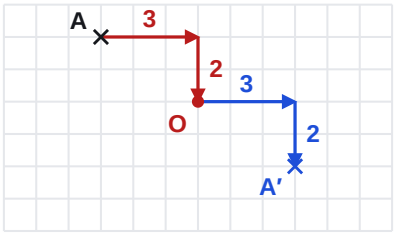


Les trois gestes : la demi-droite, le compas, le point. On peut aussi mesurer OA à la règle graduée et reporter la mesure.

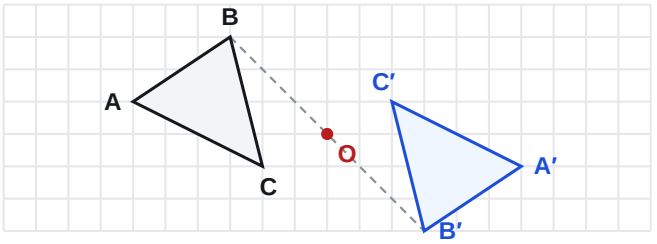
SUR QUADRILLAGE, EN COMPTANT LES CARREAUX

1. Compter le trajet de A jusqu'à O : tant de carreaux vers la droite ou la gauche, tant vers le haut ou le bas.
2. Refaire **exactement le même trajet** en partant de O : on arrive en A'.

de A à O, puis le même trajet de O à A′



sommet par sommet, puis on relie dans le même ordre



À gauche, 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas, deux fois de suite. À droite, chaque sommet du triangle se construit de la même façon.

EXEMPLE

Sur le quadrillage de droite, B est à 3 carreaux à gauche et 3 au-dessus de O. Où placer B' ? Et si $OB = 3$ cm sur une feuille blanche, que vaut BB' ?

1. Le trajet de B à O : 3 carreaux vers la droite, 3 vers le bas. On le refait depuis O : B' est à 3 carreaux à droite et 3 au-dessous de O.
2. O est le milieu de $[BB']$, donc $OB' = OB = 3$ cm, et les deux longueurs s'ajoutent.
   $BB' = 3 + 3 = 6$

B' est à 3 cm de O, mais à 6 cm de B.

PIÈGE

Placer A' n'importe où sur le cercle de centre O passant par A, « puisque $OA' = OA$ ». — il faut aussi que A, O et A' soient alignés. Sur ce cercle, un seul point convient : l'autre extrémité du diamètre qui part de A.

Ce que ça coûte : le point est faux, et toute figure construite à partir de lui.

Le réflexe : tracer d'abord la droite (AO) ; le compas ne sert qu'à reporter OA sur cette droite.

PIÈGE

Écrire $OA' = 2 \times OA$: « le symétrique est deux fois plus loin ». — c'est AA' qui vaut le double de OA. Le point A' est exactement **aussi loin** de O que A.

Ce que ça coûte : toutes les longueurs de l'image sont fausses.

Le réflexe : revenir à la définition : le milieu est à égale distance des deux extrémités.

PIÈGE

Sur quadrillage, ne changer qu'un seul sens : de « 3 à gauche, 2 en haut » passer à « 3 à droite, 2 en haut ». — c'est le symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par O, une symétrie axiale. Le demi-tour inverse **les deux** sens.

Ce que ça coûte : le point est faux, et toute la figure image avec lui.

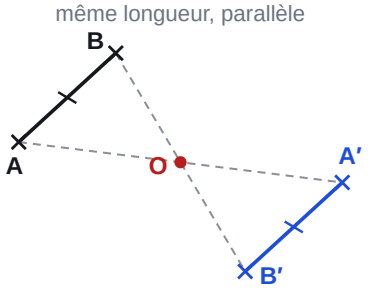
Le réflexe : dire le trajet de A à O, puis le répéter tel quel depuis O.

2 L'image d'une figure et ses propriétés

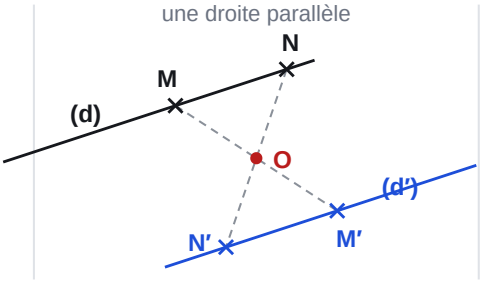
CONSTRUIRE L'IMAGE D'UNE FIGURE

1. Repérer les points qui suffisent à tracer la figure : les extrémités d'un segment, deux points d'une droite, le centre d'un cercle, les sommets d'un polygone.
2. Construire leurs symétriques par rapport à O, un par un.
3. Retracer la figure : relier les points images **dans le même ordre** ; pour un cercle, garder **le même rayon**.

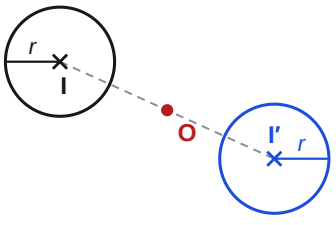
un segment
même longueur, parallèle



une droite
une droite parallèle



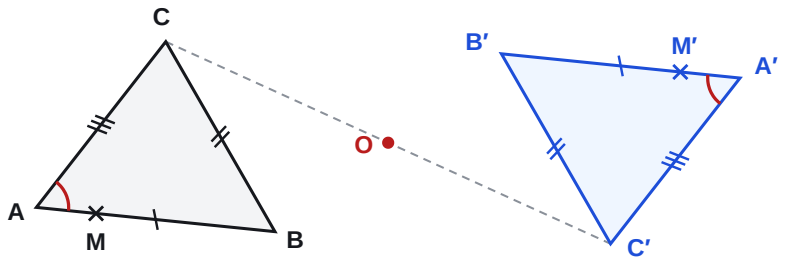
un cercle
même rayon, centre I′



Un segment, une droite, un cercle, et leurs images en bleu. Deux points, ou le centre, suffisent : le reste suit.

PROPRIÉTÉ

Le demi-tour **conserve** les **longueurs**, les **angles**, les **aires**, l'**alignement** et le **parallélisme** : une figure et son image sont superposables. Ces propriétés se constatent ; on les **admet**, puis on s'en sert pour justifier sans mesurer. L'image d'une **droite** est une droite **parallèle** (une droite qui passe par O est sa propre image) ; celle d'un **segment**, un segment parallèle de **même longueur** ; celle d'un **cercle**, un cercle de **même rayon**, centré au symétrique du centre.



le demi-tour conserve

les longueurs : A′B′ = AB
les angles (arcs rouges)
les aires des deux triangles
l'alignement : M′ ∈ [A′B′]
et (A′B′) // (AB)

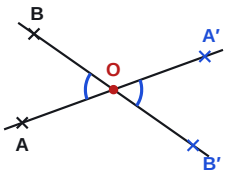
Mêmes codages, mêmes angles : $A'B'C'$ est superposable à ABC. Le point M de $[AB]$ a pour image un point M' de $[A'B']$.

EXEMPLE

Deux droites se coupent en O. On prend A sur l'une, B sur l'autre, et leurs symétriques A' et B' par rapport à O. Pourquoi les angles opposés par le sommet $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont-ils égaux ?

1. O est son propre symétrique : l'angle $\widehat{A'OB'}$ est l'image de l'angle $\widehat{AOB}$ par le demi-tour de centre O.
2. Or le demi-tour conserve les angles.

$\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}$: deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.



Le demi-tour de centre O envoie un angle sur l'angle opposé.

PIÈGE

Écrire que la droite (d) et sa symétrique (d') se coupent en O. — l'image d'une droite par un demi-tour lui est **parallèle**. Elle ne passe par O que si (d) y passe déjà, et c'est alors (d) elle-même.

Ce que ça coûte : une figure fausse, et une justification qui contredit le cours.

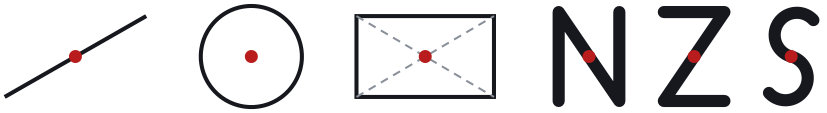
Le réflexe : construire les images de deux points de (d), puis contrôler que la droite obtenue est parallèle à (d).

3 Centre de symétrie d'une figure

DÉFINITION

Un point O est un **centre de symétrie** d'une figure lorsque le symétrique de cette figure par rapport à O est **la figure elle-même** : après un demi-tour autour de O, elle se superpose exactement à elle-même.

un centre de symétrie (point rouge)



segment — cercle — rectangle — N, Z, S

aucun centre de symétrie



triangle équilatéral — A, E

Le milieu d'un segment, le centre d'un cercle, le point de rencontre des diagonales d'un rectangle ; N, Z et S en capitales bâton. Un triangle, A et E n'en ont pas.

CHERCHER UN CENTRE DE SYMÉTRIE

1. Repérer le point candidat, au « milieu » de la figure, puis imaginer le demi-tour autour de lui, ou tourner la feuille de 180°.
2. La figure doit paraître inchangée. Un seul point dont le symétrique n'est pas sur la figure suffit à conclure : ce n'est pas un centre de symétrie.

EXEMPLE

Un cercle de centre I a-t-il un centre de symétrie ?

1. Par le demi-tour de centre I, son image est un cercle de même rayon, centré au symétrique de I, c'est-à-dire en I : c'est le cercle de départ.

oui : le centre I du cercle est son centre de symétrie.

PIÈGE

Affirmer qu'un triangle équilatéral a un centre de symétrie, puisqu'il a trois axes de symétrie. — après un demi-tour, sa pointe est en bas : il ne se superpose pas à lui-même. Un triangle n'a **jamais** de centre de symétrie.

Ce que ça coûte : la réponse et sa justification.

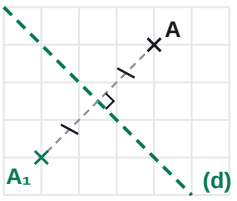
Le réflexe : tourner la feuille d'un demi-tour : si la figure a changé d'aspect, elle n'a pas de centre de symétrie.

N, Z et S ont un centre mais aucun axe ; le rectangle et le cercle ont les deux. Le parallélogramme a un centre, le milieu commun de ses diagonales : voir la fiche « Parallélogrammes ». Rosaces, pavages et frises en offrent d'autres.

4 Demi-tour ou symétrie axiale ?

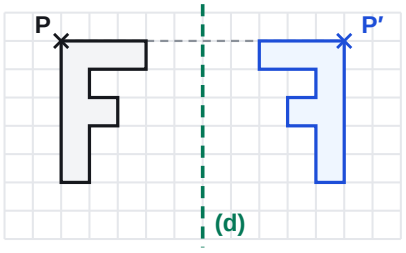
DÉFINITION

Le symétrique de A par rapport à la droite (d) est le point A_1 tel que (d) est la **médiatrice** de $[AA_1]$. Sur feuille blanche : perpendiculaire à (d) par A, puis report de la distance. Sur quadrillage : on compte les carreaux perpendiculairement à l'axe, en diagonale si l'axe l'est.

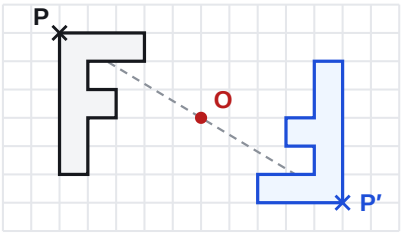


Axe en diagonale du quadrillage.

symétrie axiale : on plie, la figure est retournée



demi-tour : on tourne, sans retourner



La même figure. Pliée le long de (d), elle est retournée ; tournée d'un demi-tour autour de O, elle a la tête en bas mais n'est pas retournée.

RECONNAÎTRE LA TRANSFORMATION

1. Relier deux points à leurs images. Segments de **même milieu** : demi-tour, de centre ce milieu ; la figure a **tourné**.
2. Segments **perpendiculaires à une même droite** passant par leurs milieux : symétrie axiale d'axe cette droite ; la figure est **retournée**.

EXEMPLE

Sur la figure de droite, quelle transformation envoie la figure grise sur la figure bleue ?

1. De P à O puis de O à P', le trajet est le même : 5 carreaux vers la droite, 3 vers le bas. O est le milieu de $[PP']$.
2. Si l'on tourne la feuille d'un demi-tour, la figure image redevient un F à l'endroit : elle n'est pas retournée.

c'est le demi-tour de centre O.

PIÈGE

Voir une figure « la tête en bas » et conclure à une symétrie d'axe horizontal. — une symétrie d'axe horizontal met bien la tête en bas, mais la gauche reste à gauche. Le demi-tour échange **aussi** la gauche et la droite.

Ce que ça coûte : la nature de la transformation, donc toute la justification.

Le réflexe : tourner la feuille d'un demi-tour : si l'image redevient la figure de départ, c'est un demi-tour ; sinon, chercher un axe.

À VÉRIFIER

- A, O, A' **alignés**, et $OA' = OA$?
- Sur quadrillage : **le même trajet** depuis O ?
- Points images reliés **dans le même ordre** ?
- Une **propriété citée** plutôt qu'une mesure ?
- Axe ou centre ? Retournée ou tournée ?

À RETENIR

- A' symétrique de A par rapport à O : O **milieu** de $[AA']$.
- Construire : la demi-droite $[AO)$, puis reporter OA.
- **Conservés** : longueurs, angles, aires, alignement.
- Image d'une droite : une **parallèle** ; d'un cercle : **même rayon**.
- **Centre de symétrie** : la figure revient sur elle-même. Triangle : jamais.
- Axiale : on **plie**, figure retournée. Demi-tour : on **tourne**.