COURS

Hauteurs et médianes — Triangles, constructions et aire

5e

Programme de mathématiques du cycle 4 — arrêté du 18 février 2026, BO n° 10 du 5 mars 2026

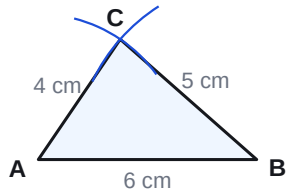
Trois données bien choisies suffisent à construire un triangle, et chaque triangle porte ses droites remarquables : médiatrices, hauteurs, médianes. Elles convergent toutes vers un même calcul, celui de l'aire. **L'aire d'un triangle vaut un côté multiplié par la hauteur relative à ce côté, divisé par 2 — et cette hauteur est toujours perpendiculaire au côté choisi.**

1 Construire et reconnaître un triangle

PROPRIÉTÉ

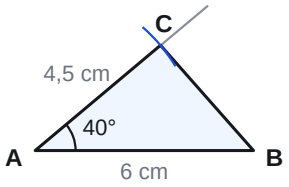
Inégalité triangulaire. Trois longueurs forment un triangle seulement si **la plus grande est strictement inférieure à la somme des deux autres**. Avec 4 cm, 6 cm et 9 cm : $4 + 6 = 10$ et $10 > 9$, le triangle existe. Avec 3 cm, 5 cm et 8 cm : $3 + 5 = 8$, la somme est égale au plus grand côté, les trois points sont alignés et il n'y a pas de triangle.

trois côtés



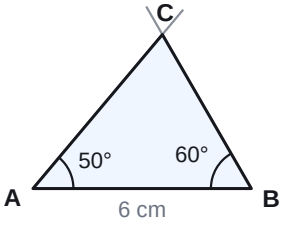
compas : deux arcs

deux côtés et l'angle compris



rapporteur, puis compas

un côté et ses deux angles



rapporteur aux deux bouts

Les trois cas de construction, à l'échelle. Les traits de construction restent visibles.

CONSTRUIRE SELON LES DONNÉES

1. **Schéma à main levée** avec les données : il dit dans quel cas on se trouve.
2. **Trois côtés** : vérifier l'inégalité triangulaire, tracer un côté, puis deux arcs de compas centrés sur ses extrémités ; ils se coupent au troisième sommet.
3. **Deux côtés et l'angle compris** : tracer un côté, construire l'angle au rapporteur à une extrémité, reporter l'autre longueur au compas sur la demi-droite.
4. **Un côté et deux angles** : construire les deux angles **adjacents** au côté, à ses extrémités et du même côté ; les demi-droites se coupent au troisième sommet.
   si un angle donné n'est pas adjacent au côté, calculer d'abord le troisième avec la somme de 180°.
5. Nommer, coder, et **laisser les traits de construction**.

EXEMPLE

Construire le triangle RST tel que $RS = 7$ cm, $\widehat{R} = 45^\circ$ et $\widehat{T} = 75^\circ$.

1. $\widehat{T}$ n'est pas adjacent à $[RS]$: on calcule d'abord $\widehat{S}$ par la somme des angles (démontrée dans la fiche « Géométrie — Triangles, angles et droites »).
   $180 - 45 - 75 = 60$
2. On trace $[RS]$, puis 45° en R et 60° en S, du même côté : les demi-droites se coupent en T.

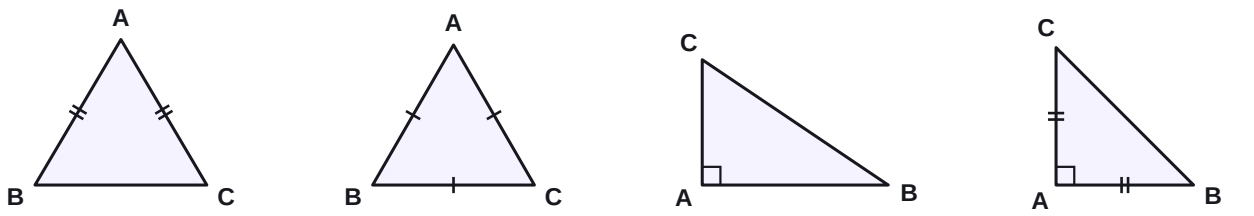
contrôle au rapporteur : l'angle en T mesure bien 75°

PIÈGE

Tracer un angle de 130° au lieu de 50°, en lisant la mauvaise graduation du rapporteur. — le rapporteur porte deux graduations en sens contraires ; lue du mauvais côté, 50 devient 180 − 50 = 130.

Ce que ça coûte : toute la construction : le troisième sommet est faux, et tout ce qui en dépend.

Le réflexe : se demander d'abord si l'angle est aigu ou obtus : 50° est plus petit qu'un angle droit.



Des traits identiques disent « même longueur » ; un petit carré dit « angle droit ».

DÉFINITION

Isocèle : deux côtés égaux, qui se rejoignent au **sommet principal** ; le troisième est la **base**. **Équilatéral** : trois côtés égaux (il est donc aussi isocèle). **Rectangle** : un angle droit ; le côté opposé est l'**hypoténuse**.

PIÈGE

Affirmer « ABC est isocèle » parce que deux côtés ont l'air égaux sur le dessin. — un schéma n'est pas une preuve : en 5e, ni l'œil ni la mesure sur la figure ne démontrent une égalité. Seuls le **codage** et l'**énoncé** comptent.

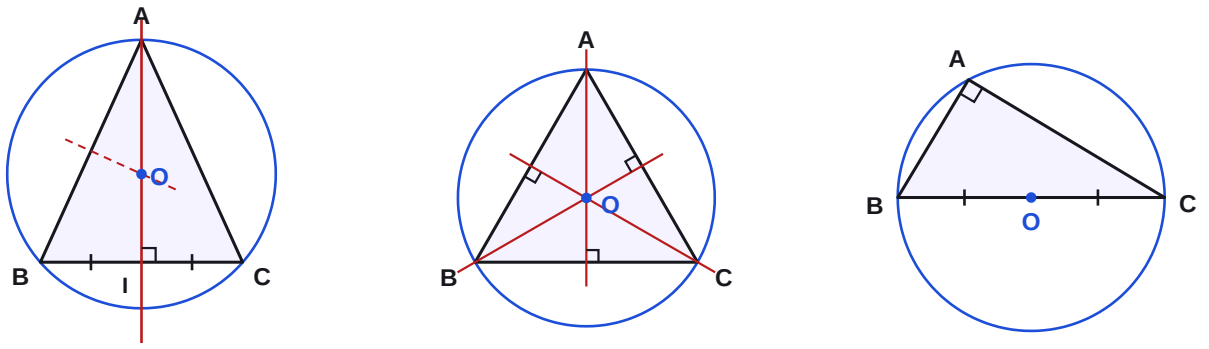
Ce que ça coûte : la justification entière : une affirmation fondée sur l'apparence ne rapporte rien.

Le réflexe : sans codage ni phrase de l'énoncé, répondre « on ne peut pas savoir ».

2 Médiatrices et cercle circonscrit

PROPRIÉTÉ

La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu ; chacun de ses points est à égale distance des extrémités (construction au compas : fiche « Cercle »). **Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point O** équidistant des trois sommets : le centre du **cercle circonscrit**, qui passe par les trois sommets.



Dans les triangles particuliers, le centre O se trouve sans tracer trois médiatrices.

PLACER LE CENTRE O SANS TRACER TROIS MÉDIATRICES

1. **Isocèle en A** : $AB = AC$, donc A est sur la médiatrice de la base $[BC]$, qui est l'axe de symétrie. On trace (AI), avec I milieu de $[BC]$, puis une seule autre médiatrice.
2. **Équilatéral** : chaque médiatrice passe par le sommet opposé ; deux droites « sommet – milieu du côté opposé » suffisent.
3. **Rectangle** : O est le **milieu de l'hypoténuse**, et le rayon en vaut la moitié. On l'observe et on l'admet ; la preuve viendra en 4e.
   le centre n'est à l'intérieur que si les trois angles sont aigus ; il est dehors dès qu'un angle est obtus.

EXEMPLE

EFG est rectangle en F et $EG = 9$ cm. Où est le centre de son cercle circonscrit, et quel est son rayon ?

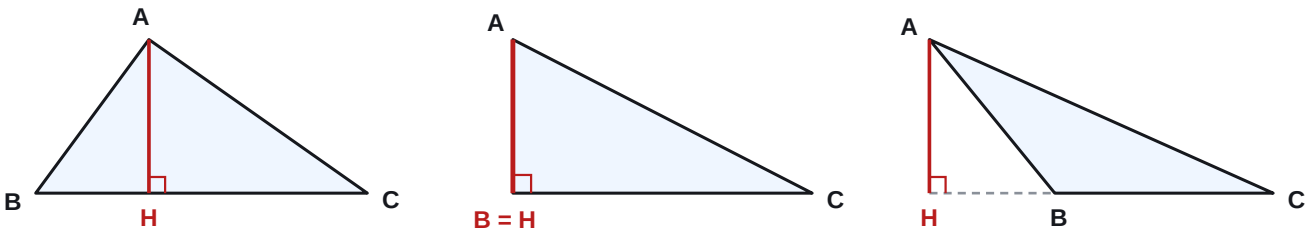
1. L'angle droit est en F : l'hypoténuse est $[EG]$, le centre est son milieu M, et le rayon vaut sa moitié.
   $9 \div 2 = 4{,}5$

centre : le milieu de [EG] ; rayon : 4,5 cm

3 Hauteurs et aire d'un triangle

DÉFINITION

La **hauteur issue de** A est la droite qui passe par le sommet A et qui est **perpendiculaire** à la droite (BC) portant le côté opposé. Elle coupe (BC) en H, le **pied** de la hauteur. On appelle aussi hauteur le segment $[AH]$ et sa longueur AH : c'est la **hauteur relative au côté** $[BC]$.



pied H sur le côté [BC]
la hauteur est intérieure

rectangle en B
la hauteur est le côté [AB]

angle obtus en B
on prolonge [BC] : H est dehors

Le pied de la hauteur peut tomber sur le côté, en un sommet, ou sur le prolongement du côté.

TRACER UNE HAUTEUR À L'ÉQUERRE

1. Repérer le côté **opposé** au sommet ; si l'angle est obtus, le prolonger en pointillés. Poser un bord de l'angle droit de l'équerre sur ce côté.
2. Faire glisser l'équerre jusqu'au sommet, tracer, nommer le pied H et **coder l'angle droit**.

PROPRIÉTÉ

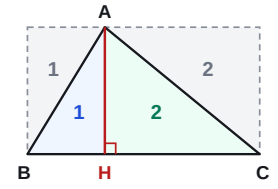
L'aire d'un triangle est égale au produit d'un côté par la hauteur relative à ce côté, divisé par 2 : $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{BC \times AH}{2}$.

N'importe lequel des trois côtés peut servir de base, pourvu qu'on prenne **sa** hauteur.

D'OÙ VIENT LA DIVISION PAR 2

1. La hauteur $[AH]$ coupe ABC en deux triangles rectangles, les pièces 1 et 2. Chacune est la moitié d'un rectangle, coupé par sa diagonale.
2. Réunis, les deux rectangles forment un rectangle de côtés BC et AH : le triangle en occupe la moitié.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$



Chaque pièce a sa copie hors du triangle : le triangle est la moitié du rectangle.

Quand le pied H est **dehors**, la formule reste vraie : l'aire de ABC est la différence $\dfrac{HC \times AH}{2} - \dfrac{HB \times AH}{2} = \dfrac{BC \times AH}{2}$.

Conséquence : deux triangles de bases égales et de hauteurs relatives égales ont la **même aire**, même de formes différentes.

EXEMPLE

ABC est rectangle en A, avec $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. Calculer son aire, puis la hauteur relative à l'hypoténuse $[BC]$.

1. $[AB]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires : l'un est la hauteur relative à l'autre.
   $\dfrac{6 \times 8}{2} = 24$
   l'aire vaut 24 cm²
2. Avec la base $[BC]$: $\dfrac{10 \times h}{2} = 24$, donc $10 \times h = 48$.
   $h = 48 \div 10 = 4{,}8$

aire 24 cm² ; hauteur relative à [BC] : 4,8 cm

PIÈGE

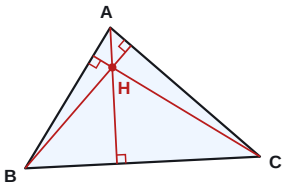
Multiplier deux côtés qui ne sont pas perpendiculaires, ou oublier de diviser par 2. — la hauteur est **perpendiculaire** à la base ; un côté oblique est plus long qu'elle. Et $BC \times AH$ est l'aire du **rectangle** qui contient le triangle, pas celle du triangle.

Ce que ça coûte : le résultat entier, même si la multiplication est juste.

Le réflexe : chercher le codage de l'angle droit entre base et hauteur, se redire « un triangle, c'est la moitié d'un rectangle », et finir en cm².

PROPRIÉTÉ

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (on le constate, et on l'admet) : elles passent par un même point, l'**orthocentre**. Si un angle est obtus, ce sont les droites prolongées qui se coupent, hors du triangle.



Trois hauteurs, un seul point de rencontre H.

4 Médianes

DÉFINITION

La **médiane issue de** A joint le sommet A au **milieu** I du côté opposé $[BC]$: placer I à la règle graduée, coder $BI = IC$, joindre A. Les trois médianes se coupent en un même point, le **centre de gravité** (on l'observe).

EXEMPLE

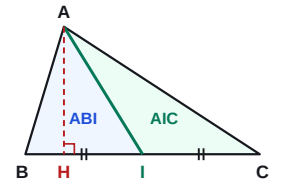
Démontrer qu'une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire : si I est le milieu de $[BC]$, les triangles ABI et AIC ont la même aire.

(1) La hauteur $[AH]$ issue de A est perpendiculaire à (BC), qui porte $[BI]$ et $[IC]$: c'est la hauteur relative à $[BI]$ dans ABI, **et** à $[IC]$ dans AIC.

(2) I est le milieu de $[BC]$, donc $BI = IC$: les deux aires se calculent avec les mêmes nombres.

$$\mathcal{A}_{ABI} = \frac{BI \times AH}{2} = \frac{IC \times AH}{2} = \mathcal{A}_{AIC}$$

ABI et AIC ont la même aire, la moitié de celle de ABC — dans tout triangle



Même hauteur AH, bases BI et IC égales : même aire.

PIÈGE

Écrire que la médiane coupe le triangle en deux triangles « identiques ». — les deux triangles ont la même **aire**, pas la même **forme** : rien n'oblige AB et AC à être égaux.

Ce que ça coûte : la conclusion de la démonstration.

Le réflexe : dire « de même aire », jamais « superposables » — sauf si le triangle est isocèle en A.

5 Dans les triangles particuliers

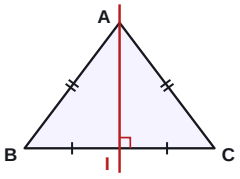
EXEMPLE

ABC est isocèle en A, I est le milieu de $[BC]$. Démontrer que (AI) est la médiatrice de $[BC]$, la médiane et la hauteur issues de A.

(1) $AB = AC$, donc A est sur la médiatrice de $[BC]$; le milieu I aussi. Cette médiatrice est donc (AI).

(2) (AI) joint A au milieu de $[BC]$: c'est la médiane. Elle est perpendiculaire à (BC) : c'est la hauteur.

isocèle en A : ces trois droites sont confondues, c'est l'axe de symétrie



Isocèle en A : médiatrice, médiane et hauteur confondues.

RÈGLE

Équilatéral : c'est vrai pour les trois sommets. **Rectangle en** A : $[AB]$ et $[AC]$ sont deux hauteurs, l'orthocentre est A et l'aire vaut $AB \times AC \div 2$; la médiane issue de A aboutit au centre du cercle circonscrit et mesure la moitié de l'hypoténuse.

À VÉRIFIER

- Inégalité triangulaire : avec le **plus grand** côté ?
- Angles adjacents au côté ? Sinon, troisième angle calculé ?
- Conclusion tirée du **codage** ou de l'énoncé ?
- Hauteur **perpendiculaire** à la base, et codée ?
- Médiane, hauteur, médiatrice : la bonne droite ?

À RETENIR

- Un triangle existe si **le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres**.
- Une **hauteur** passe par un sommet, **perpendiculaire** au côté opposé ; son pied peut être dehors.
- **Aire d'un triangle = côté × hauteur relative ÷ 2**, en cm².
- Une **médiane** (sommet → milieu du côté opposé) partage le triangle en deux triangles **de même aire**.
- Cercle circonscrit d'un triangle rectangle : centre au **milieu de l'hypoténuse**.