COURS

Médiatrice et triangles — Cercle circonscrit, somme des angles

6e

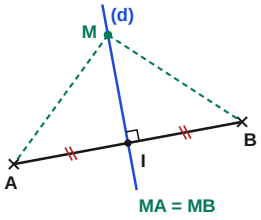
Programme du cycle 3 — arrêté du 10 avril 2025, BO du 17 avril 2025 (Hebdo 16) — MENE2504620A

Deux maisons, un seul banc à placer à la même distance de chacune : où le poser ? La réponse tient en une droite, la **médiatrice**. Ce chapitre réunit les deux grands sujets de la géométrie de 6e, les distances et les angles, autour de deux phrases : **un point de la médiatrice de $[AB]$ est à égale distance de A et de B ; dans tout triangle, la somme des trois angles vaut 180°.**

1 La médiatrice d'un segment

DÉFINITION

La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite qui passe par le **milieu** de $[AB]$ et qui est **perpendiculaire** à $[AB]$. Deux conditions, toujours ensemble : le milieu **et** l'angle droit. On les code sur la figure : petits traits égaux, carré de l'angle droit.



(d) est la médiatrice de $[AB]$: I milieu, angle droit. Le point M de (d) est aussi loin de A que de B.

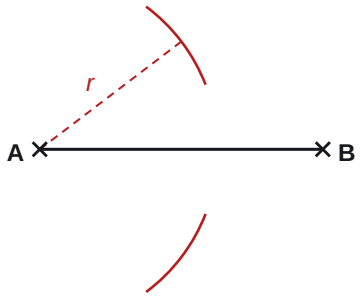
PROPRIÉTÉ

Propriété caractéristique. Si un point est **sur** la médiatrice de $[AB]$, alors il est **à égale distance** de A et de B. Et inversement : si un point est à égale distance de A et de B, alors il est sur la médiatrice de $[AB]$. Autrement dit, la médiatrice de $[AB]$ est **l'ensemble de tous les points situés à la même distance de A et de B**. On le voit en pliant la feuille le long de la médiatrice : A vient sur B, donc $[MA]$ vient sur $[MB]$.

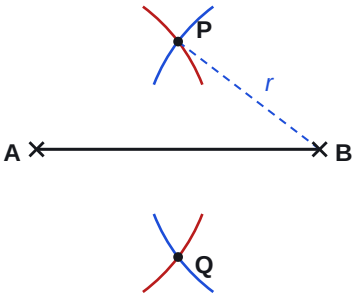
CONSTRUIRE LA MÉDIATRICE AU COMPAS

1. Écarter le compas d'une longueur r **nettement plus grande que la moitié** de AB. Pointe en A : tracer un arc au-dessus et un arc au-dessous de $[AB]$.
2. **Sans changer l'écartement**, pointe en B : tracer deux arcs qui coupent les premiers, en P et en Q.
3. Tracer la droite (PQ) : c'est la médiatrice. Pourquoi ? $PA = PB = r$ et $QA = QB = r$: P et Q sont à égale distance de A et de B, donc tous deux sur la médiatrice ; et deux points suffisent pour tracer une droite.

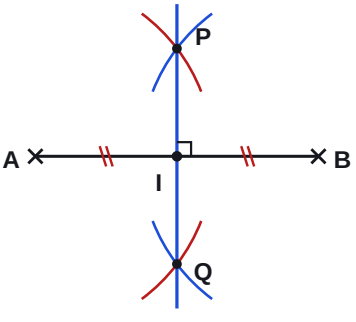
1. pointe en A, écartement r



2. pointe en B, même écartement r



3. tracer la droite (PQ)



Le même écartement r des deux côtés : c'est ce qui place P et Q à égale distance de A et de B. Autre méthode, aux instruments : placer le milieu à la règle graduée, puis tracer la perpendiculaire à l'équerre.

EXEMPLE

M est un point de la médiatrice de $[AB]$, avec $MA = 4{,}5$ cm. Que vaut MB ? Et un point N tel que $NA = 3$ cm et $NB = 3{,}5$ cm est-il sur cette médiatrice ?

(1) M est sur la médiatrice de $[AB]$, donc il est à égale distance de A et de B : $MB = MA = 4{,}5$ cm.

(2) NA et NB ne sont pas égales : N n'est pas à égale distance de A et de B, donc il n'est pas sur la médiatrice.

$MB = 4{,}5$ cm, sans mesurer ; N n'est pas sur la médiatrice de $[AB]$.

PIÈGE

Tracer la perpendiculaire à $[AB]$ qui passe par A, ou une droite qui passe par le milieu « à peu près droite », et l'appeler médiatrice. — la médiatrice exige les **deux** conditions : passer par le milieu **et** être perpendiculaire.

Ce que ça coûte : la médiatrice est fausse, et tous les points placés dessus aussi.

Le réflexe : coder les deux sur la figure : les traits égaux et l'angle droit.

PIÈGE

Changer l'écartement du compas entre la pointe en A et la pointe en B, ou prendre moins de la moitié de AB. — avec deux rayons différents, P n'est plus à égale distance de A et de B ; trop petits, les arcs ne se coupent pas.

Ce que ça coûte : la construction entière, et les points qui en dépendent.

Le réflexe : régler le compas une seule fois, assez grand, puis ne plus y toucher.

PIÈGE

Écrire « $PA = 4$ cm, donc P est sur la médiatrice de $[AB]$ ». — la propriété compare **deux** distances : il faut aussi savoir que $PB = 4$ cm.

Ce que ça coûte : la justification, même si le point est bien placé.

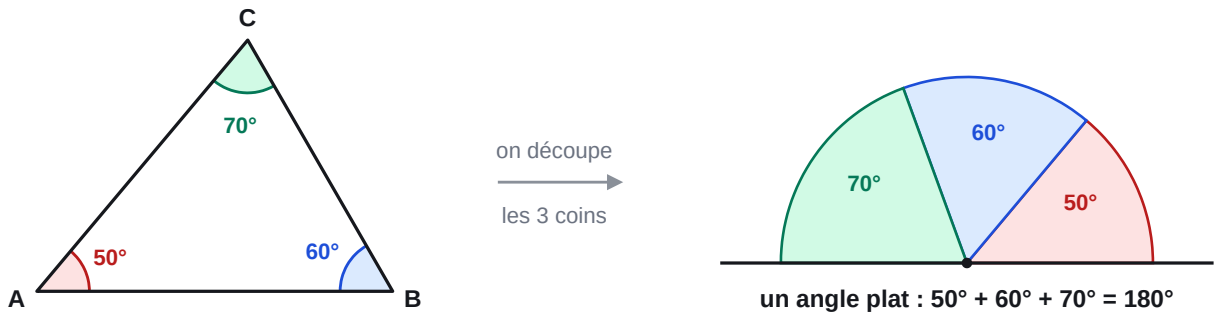
Le réflexe : chercher l'égalité complète $PA = PB$ avant de conclure.

2 La somme des angles d'un triangle

PROPRIÉTÉ

Dans **tout** triangle ABC, la somme des mesures des trois angles est égale à **180°**. On note $\widehat{A}$ l'angle du triangle de sommet A, c'est-à-dire $\widehat{BAC}$. On l'**admet** en 6e : on le **constate** en mesurant les angles au rapporteur, ou en découpant les trois coins d'un triangle de papier et en les plaçant côte à côte. La démonstration viendra en 5e.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$



un angle plat : 50° + 60° + 70° = 180°

Quel que soit le triangle, ses trois coins mis bout à bout forment un angle plat.

CALCULER LE TROISIÈME ANGLE

(1) Écrire la propriété : « dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180° ».

(2) Retirer de 180 les deux mesures connues ; conclure par une phrase, avec l'unité, le degré.

EXEMPLE

Dans le triangle ABC, $\widehat{A} = 47^\circ$ et $\widehat{B} = 68^\circ$. Calcule $\widehat{C}$.

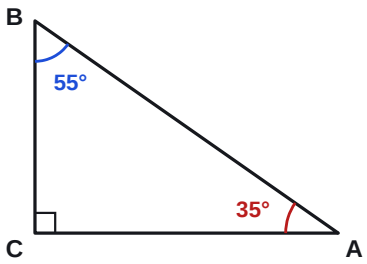
(1) Dans le triangle ABC, la somme des angles vaut 180°, donc, en degrés :
$\widehat{C} = 180 - 47 - 68 = 65$

$\widehat{C} = 65^\circ$. Contrôle : $47 + 68 + 65 = 180$.

PROPRIÉTÉ

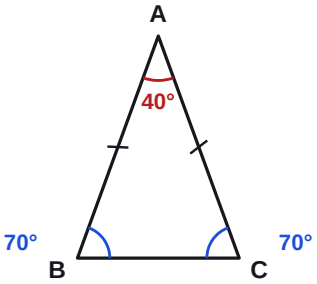
Les triangles particuliers. Dans un triangle **rectangle**, les deux angles aigus ont pour somme 90°, puisque l'angle droit prend déjà 90° sur 180°. Dans un triangle **isocèle** en A (A est le sommet principal, $[BC]$ la base), les deux **angles à la base** $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ont la **même mesure** : la médiatrice de la base est un axe de symétrie du triangle. Inversement, un triangle qui a deux angles de même mesure est isocèle. Dans un triangle **équilatéral**, les trois angles mesurent **60°**.

rectangle en C



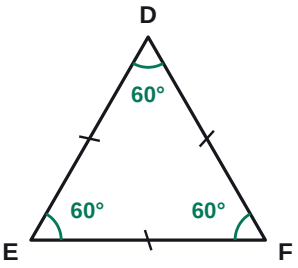
35° + 55° = 90°

isocèle en A



40° + 70° + 70° = 180°

équilatéral



3 × 60° = 180°

Le codage dit la nature du triangle ; la nature donne des angles sans mesurer.

EXEMPLE

ABC est isocèle en A avec $\widehat{A} = 40^\circ$. Calcule $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Puis : EFG est rectangle en G avec $\widehat{E} = 28^\circ$; calcule $\widehat{F}$.

1. Les deux angles à la base se partagent ce qui reste de 180°, en degrés :
   $180 - 40 = 140$
2. Ils sont égaux, donc chacun mesure la moitié :
   $140 \div 2 = 70$
3. Dans EFG, rectangle en G, $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ ont pour somme 90° :
   $\widehat{F} = 90 - 28 = 62$

$\widehat{B} = \widehat{C} = 70^\circ$; $\widehat{F} = 62^\circ$.

EXEMPLE

Construire le triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $\widehat{A} = 50^\circ$ et $\widehat{C} = 70^\circ$.

1. On ne peut pas tracer $\widehat{C}$ tant que C n'existe pas. On calcule donc l'autre angle posé sur $[AB]$, en degrés :
   $\widehat{B} = 180 - 50 - 70 = 60$
2. On trace $[AB]$, l'angle de 50° en A et l'angle de 60° en B au rapporteur ; les deux côtés se coupent en C.

un triangle avec $\widehat{B} = 60^\circ$; au rapporteur, on contrôle $\widehat{C} = 70^\circ$.

PIÈGE

Triangle isocèle en A, $\widehat{A} = 40^\circ$: écrire « $\widehat{B} = 180 - 40 = 140^\circ$ ». — les 140° restants se partagent entre **deux** angles égaux.

Ce que ça coûte : les deux angles à la base sont faux.

Le réflexe : nommer le sommet principal, puis diviser par 2 ce qui reste.

PIÈGE

Dans un triangle rectangle, calculer $180 - 35 = 145$ pour le troisième angle. — l'angle droit compte aussi : le troisième angle vaut $180 - 90 - 35$, soit 55°.

Ce que ça coûte : le résultat, et un angle obtus dans un triangle rectangle, ce qui est impossible.

Le réflexe : écrire les **trois** angles avant de calculer.

PIÈGE

Mesurer au rapporteur un angle demandé « par le calcul », sur une figure à main levée. — une figure à main levée n'est pas exacte : seule la propriété donne la vraie mesure.

Ce que ça coûte : la justification, et souvent la valeur.

Le réflexe : calculer avec 180°, puis vérifier que la somme des trois angles fait 180.

3 Les médiatrices d'un triangle et le cercle circonscrit

PROPRIÉTÉ

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont **concourantes** : elles passent par un **même point**, souvent noté O. On l'**admet** en 6e ; on le constate sur chaque figure construite avec soin.

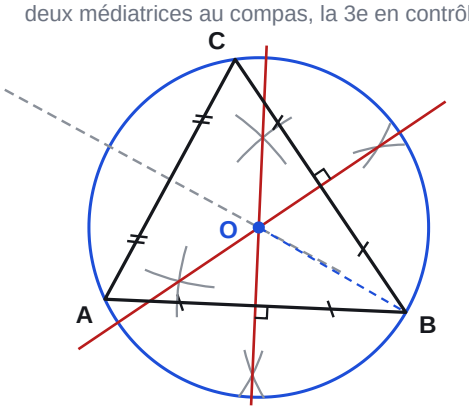
DÉFINITION

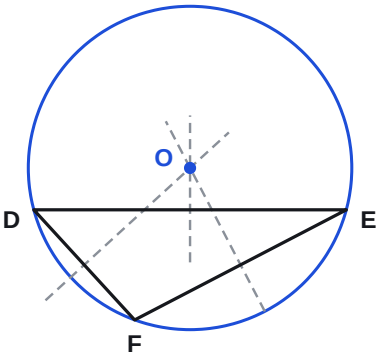
Le **cercle circonscrit** à un triangle est le cercle qui passe par ses **trois sommets**. Son centre est le point O où se coupent les médiatrices. En effet, O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $OA = OB$; il est sur celle de $[BC]$, donc $OB = OC$. Ainsi $OA = OB = OC$: le cercle de centre O et de rayon OA passe par A, B et C.

CONSTRUIRE LE CERCLE CIRCONSCRIT

1. Construire au compas la médiatrice de deux côtés, par exemple $[AB]$ et $[BC]$.
2. Leur point d'intersection est le centre O. Contrôle : la troisième médiatrice passe aussi par O.
3. Pointe du compas en O, écartement jusqu'à un **sommet** : tracer le cercle. Il doit passer par les trois sommets.

deux médiatrices au compas, la 3e en contrôle





ici, le centre est hors du triangle

À gauche, la construction complète. À droite, un triangle à angle obtus : le centre O n'est pas toujours à l'intérieur du triangle.

EXEMPLE

Trois villages A, B et C veulent un château d'eau à la même distance de chacun d'eux. Où le placer ?

1. À égale distance de A et de B : sur la médiatrice de $[AB]$. À égale distance de B et de C : sur la médiatrice de $[BC]$.
2. Le point qui est sur les deux est leur intersection O, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

au centre O du cercle circonscrit à ABC, et nulle part ailleurs.

PIÈGE

Placer le centre « au milieu » du triangle à vue d'œil, ou prendre comme rayon la distance de O au milieu d'un côté. — le centre doit être à égale distance des trois **sommets** : seules de vraies médiatrices le garantissent, et le cercle passe par les sommets, pas par les milieux des côtés.

Ce que ça coûte : le cercle ne passe pas par les trois sommets : toute la construction.

Le réflexe : deux médiatrices au compas, la troisième en contrôle, puis le compas de O jusqu'à A ; vérifier en B et en C.

À VÉRIFIER

- Médiatrice : le **milieu** et l'**angle droit**, codés ?
- Au compas : le **même écartement** en A et en B ?
- Pour justifier qu'un point est sur la médiatrice : l'égalité **complète** $MA = MB$ est écrite ?
- Un angle demandé : **calculé** avec 180°, la propriété citée, pas mesuré ?
- Cercle circonscrit : deux médiatrices, le centre O, le rayon jusqu'à un **sommet** ?

À RETENIR

- **Médiatrice** de $[AB]$: la droite perpendiculaire à $[AB]$ en son **milieu**.
- Être sur la médiatrice de $[AB]$, c'est être **à égale distance** de A et de B.
- Au compas : **même écartement** en A et en B, deux points d'intersection, une droite.
- Dans tout triangle : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.
- Isocèle : deux **angles à la base** égaux ; équilatéral : trois angles de **60°** ; rectangle : les deux autres font **90°** à eux deux.
- Les trois médiatrices se coupent en O, **centre du cercle circonscrit** : $OA = OB = OC$.