COURS

Motifs et régularités — Premiers pas en algèbre

6e

Programme du cycle 3 — arrêté du 10 avril 2025, BO du 17 avril 2025 (Hebdo 16) — MENE2504620A

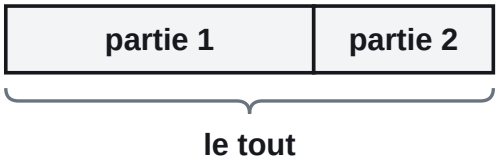
En algèbre, on raisonne sur des nombres **qu'on ne connaît pas encore**. Au lieu de calculer tout de suite, on regarde comment les quantités sont liées : « Mia a 8 billes de plus que Léo », « à chaque étape, on ajoute 3 allumettes ». **Un schéma en barres ou un motif bien observé montre ces liens ; le calcul vient après, et il devient simple.**

1 Le schéma en barres

DÉFINITION

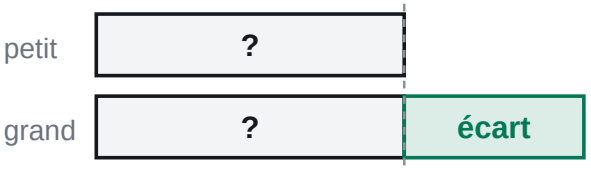
Un **schéma en barres** représente chaque quantité par une barre. Deux quantités **égales** ont des barres **de même longueur** ; une quantité plus grande a une barre plus longue. Une **accolade** regroupe des barres et porte leur total. Un nombre inconnu s'écrit « ? » ou avec un mot : on n'a pas besoin de sa valeur pour le dessiner.

Des parties et un tout



tout = partie 1 + partie 2

Une comparaison



grand = petit + écart

Les deux schémas de base. À gauche, deux parties forment un tout ; à droite, on compare deux quantités : la grande, c'est la petite plus l'écart.

RÉSOUDRE UN PROBLÈME AVEC UN SCHÉMA EN BARRES

1. **Lire** l'énoncé et repérer les quantités : lesquelles sont connues ? laquelle est inconnue ?
2. **Dessiner** une barre par quantité, de même longueur pour des quantités égales. Écrire sur le schéma les nombres connus : le total sur une accolade, l'écart sur un morceau de barre.
3. **Raisonner** sur le schéma : retirer l'écart du total, partager en barres égales, puis **calculer**.
4. **Répondre** par une phrase, puis **vérifier** que les nombres trouvés respectent **toutes** les conditions de l'énoncé.

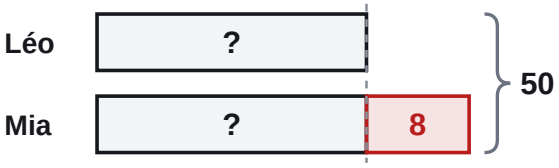
EXEMPLE

Léo et Mia ont 50 billes à eux deux. Mia a 8 billes de plus que Léo. Combien de billes chacun a-t-il ?

1. On dessine : une barre pour Léo ; pour Mia, la même barre et un morceau de 8. L'accolade porte 50.
2. On retire les 8 billes en trop : il reste deux barres égales.
   $50 - 8 = 42$
3. On partage en deux barres égales : c'est la part de Léo.
   $42 \div 2 = 21$
4. Mia a 8 billes de plus que Léo.
   $21 + 8 = 29$
5. Vérification : $21 + 29 = 50$, et $29 - 21 = 8$. Les deux conditions sont respectées.

Léo a 21 billes et Mia en a 29.

1. Le schéma



2. On retire les 8 billes en trop



50 − 8 = 42, puis 42 ÷ 2 = 21

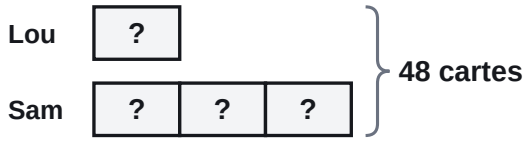
Le schéma est à l'échelle. Une fois le morceau de 8 retiré, il reste deux barres égales qui valent 42 à elles deux, soit 21 chacune.

EXEMPLE

Sam a 3 fois plus de cartes que Lou. À eux deux, ils ont 48 cartes. Combien de cartes chacun a-t-il ?

1. « 3 fois plus » : Lou a 1 barre, Sam en a 3 identiques. En tout, il y a $1 + 3 = 4$ barres égales, qui valent 48 cartes.
2. Une barre vaut donc :
   $48 \div 4 = 12$
3. Sam a 3 barres :
   $3 \times 12 = 36$
4. Vérification : $12 + 36 = 48$ et $36 = 3 \times 12$.

Lou a 12 cartes et Sam en a 36.



1 barre pour Lou + 3 barres pour Sam

= 4 barres égales, qui valent 48

« 3 fois plus » : trois barres pour Sam, une pour Lou, toutes de la même longueur.

PIÈGE

Partager le total en deux parts égales alors que l'un a plus que l'autre : « 50 ÷ 2 = 25, chacun a 25 billes ». — avec 25 et 25, Mia n'a pas 8 billes de plus que Léo. L'écart a été oublié.

Ce que ça coûte : le résultat, et toute la suite du problème

Le réflexe : retirer **d'abord** l'écart du total, **ensuite** partager en barres égales. Puis vérifier les deux conditions.

PIÈGE

« Sam a 3 fois plus que Lou, ensemble 48 » : calculer $48 \div 3 = 16$. — 48, c'est le total des **deux** enfants : 3 barres pour Sam **et** 1 pour Lou, soit 4 barres. Avec 16 et 48, le total serait 64.

Ce que ça coûte : les deux réponses, fausses toutes les deux

Le réflexe : compter **toutes** les barres du schéma avant de diviser.

PIÈGE

Confondre « 8 de plus » et « 8 fois plus ». — « de plus » ajoute un **morceau** au bout de la barre ; « fois plus » **répète** la barre. Ce ne sont pas les mêmes schémas, ni les mêmes calculs.

Ce que ça coûte : le modèle entier, donc tout le problème

Le réflexe : dessiner le schéma **avant** de choisir une opération.

2 Les motifs évolutifs

DÉFINITION

Un **motif évolutif** est une suite de figures numérotées : l'étape 1, l'étape 2, l'étape 3… Une **régularité** dit ce qui change d'une étape à la suivante (« on ajoute 3 allumettes »). La **structure** dit comment est faite **n'importe quelle** étape (« 1 allumette, plus 3 par carré »).



étape 1
4 allumettes

étape 2
7 allumettes

étape 3
10 allumettes

…

étape	1	2	3	4
allumettes	4	7	10	13

+3 +3 +3

On ajoute un carré à chaque étape. Il suffit de 3 allumettes de plus (en bleu), car le carré s'appuie sur le côté du précédent.

TROUVER LA STRUCTURE D'UN MOTIF

1. **Compter** les éléments des premières étapes et les ranger dans un **tableau**.
2. **Repérer la régularité** : combien en ajoute-t-on d'une étape à la suivante ? Est-ce toujours le même nombre ?
3. **Démonter une étape** : séparer ce qui ne change jamais et ce qui se répète autant de fois que le **numéro de l'étape**.
4. **Écrire la règle en mots**, l'appliquer à une étape lointaine, puis la **vérifier** sur une étape dessinée.

L'étape 3, démontée



1 + 3 × 3 = 10

Une allumette de départ, puis un groupe de 3 par carré. L'étape 10 a 10 carrés, donc 10 groupes.

EXEMPLE

Dans le motif des allumettes, combien faut-il d'allumettes pour l'étape 10 ? À quelle étape utilise-t-on 61 allumettes ?

1. Régularité : 4, 7, 10, 13 : on ajoute 3 à chaque étape. Structure : 1 allumette de départ, puis 3 allumettes par carré, et l'étape 10 a 10 carrés.
   $1 + 3 \times 10 = 31$
2. Vérification sur l'étape 3, dessinée : $1 + 3 \times 3 = 10$. C'est bien le bon nombre.
3. Pour 61 allumettes, on enlève l'allumette de départ : il reste les groupes de 3.
   $61 - 1 = 60$
4. On cherche combien de groupes de 3 il y a dans 60 : c'est le nombre de carrés, donc le numéro de l'étape.
   $60 \div 3 = 20$
5. Vérification : $1 + 3 \times 20 = 61$.

Il faut 31 allumettes à l'étape 10, et 61 allumettes correspondent à l'étape 20.

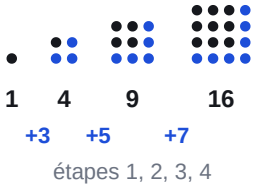
La règle s'écrit d'abord en mots : « nombre d'allumettes = 1 + 3 × numéro de l'étape ». On peut abréger « numéro de l'étape » par une lettre, par exemple n : $1 + 3 \times n$. La lettre remplace seulement un mot ; on apprendra à calculer avec les lettres au cycle 4.

EXEMPLE

Dans le motif des carrés de points, combien y a-t-il de points à l'étape 5 ? à l'étape 10 ?

1. Structure : l'étape 5 est un carré de 5 lignes de 5 points.
   $5 \times 5 = 25$
2. Contrôle par la régularité : on ajoute 3, 5, 7, puis 9 points.
   $16 + 9 = 25$
3. L'étape 10 est un carré de 10 lignes de 10 points.
   $10 \times 10 = 100$

Il y a 25 points à l'étape 5 et 100 points à l'étape 10.



étapes 1, 2, 3, 4

On ajoute 3, puis 5, puis 7 points (en bleu) : pas toujours le même nombre. La structure, elle, reste simple : un carré.

PIÈGE

« L'étape 2 a 7 allumettes, donc l'étape 10 en a $5 \times 7 = 35$. » — le motif n'est pas proportionnel : l'allumette de départ n'est comptée qu'**une** fois, pas cinq fois. La bonne réponse est 31.

Ce que ça coûte : le résultat de l'étape lointaine

Le réflexe : passer par la structure, puis vérifier la règle sur une étape dessinée.

PIÈGE

Oublier ce qui ne change pas : « 3 allumettes par carré, donc $3 \times 10 = 30$ ». — la première allumette, à gauche, n'appartient à aucun groupe de 3. Sur l'étape 1, la règle donnerait 3 au lieu de 4.

Ce que ça coûte : le résultat, et la règle elle-même

Le réflexe : tester la règle sur l'étape 1 : elle doit redonner le dessin.

PIÈGE

Croire qu'on ajoute toujours le même nombre : « de 1 à 4, on ajoute 3, donc l'étape 3 a $4 + 3 = 7$ points ». — la régularité se vérifie sur **plusieurs** étapes. Ici, on ajoute 3, puis 5 : l'étape 3 a 9 points.

Ce que ça coûte : toutes les étapes suivantes

Le réflexe : calculer les ajouts entre **toutes** les étapes données avant de conclure.

À VÉRIFIER

- Ai-je dessiné une barre par quantité, de même longueur pour des quantités égales ?
- Ai-je retiré l'écart avant de partager, et compté toutes les barres avant de diviser ?
- Ai-je rangé les premières étapes d'un motif dans un tableau, et vérifié la régularité sur plusieurs étapes ?
- Ai-je démonté une étape pour trouver ce qui ne change pas et ce qui se répète ?
- Ai-je testé ma règle sur une étape dessinée, et vérifié chaque réponse dans l'énoncé ?

À RETENIR

- Un **schéma en barres** : une barre par quantité, même longueur pour des quantités égales.
- « **De plus** » : on ajoute un morceau. « **Fois plus** » : on répète la barre.
- Partage inégal : on **retire l'écart**, puis on **partage** en barres égales.
- Un motif : la **régularité** dit ce qu'on ajoute, la **structure** dit comment est faite chaque étape.
- Allumettes en carrés : 1 + 3 × numéro de l'étape. Un motif n'est pas forcément proportionnel.
- On **vérifie** toujours : dans l'énoncé pour un problème, sur une étape dessinée pour un motif.