

Nombres entiers, décimaux et fractions

Programme du cycle 3 — BO n°31 du 30 juillet 2020

Une fraction n'est pas deux nombres empilés : c'est **une seule quantité**, et souvent la plus exacte dont on dispose. $\frac{1}{3}$ ne s'écrit pas en décimal sans arrondir — 0,333... ne s'arrête jamais. La fraction dit exactement ce que le décimal ne peut qu'approcher.

1 Lecture, écriture et comparaison des décimaux

DÉFINITION

Un nombre décimal s'écrit avec une **partie entière**, une virgule, et une **partie décimale** dont chaque rang porte un nom : dixièmes, centièmes, millièmes. Dans 3,406 : 3 unités, 4 dixièmes, 0 centième, 6 millièmes. On le lit « trois unités et quatre cent six millièmes » — jamais « trois virgule quatre cent six », qui ne dit rien du rang. Les **entiers** sont eux aussi des décimaux : leur partie décimale est simplement nulle.

chaque chiffre vaut selon sa place, et la virgule est le point de repère



La partie décimale se lit d'un bloc, pas chiffre par chiffre.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $2,5 < 2,13$ parce que 13 est plus grand que 5. — on ne compare pas les parties décimales comme des entiers. 2,5 vaut 2,50, et 50 centièmes dépassent 13 centièmes.

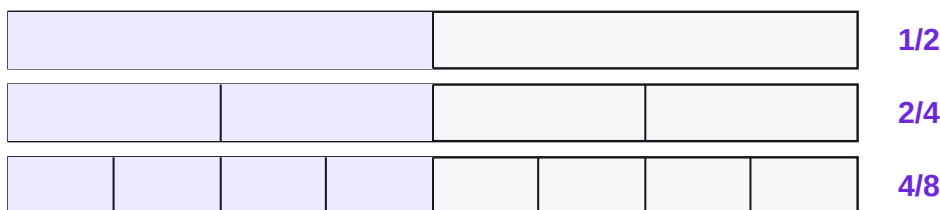
Le réflexe : compléter avec des zéros pour que les deux nombres aient autant de chiffres après la virgule, puis comparer rang par rang.

2 Comprendre une fraction

DÉFINITION

$\frac{a}{b}$ se lit « a parts sur b » : le **dénominateur** dit en combien de parts égales on a partagé l'unité, le **numérateur** combien on en prend. Une fraction est aussi une **division** : $\frac{3}{4}$ est le résultat de $3 \div 4$, soit 0,75.

trois écritures, une seule quantité : simplifier ne change rien à la valeur



la zone colorée est toujours la même : seul le découpage change

Multiplier ou diviser les deux termes par le même nombre ne change pas la fraction.

RÈGLE

On peut **multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre** sans changer la valeur de la fraction. C'est ce qui permet de simplifier — $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ en divisant par 6 — et de réduire au même dénominateur.

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

LA SIMPLIFICATION D'UNE FRACTION

- 1 **Chercher un diviseur commun** au numérateur et au dénominateur : 2 si les deux sont pairs, 5 s'ils finissent par 0 ou 5, 3 si la somme de leurs chiffres est dans la table de 3.
- 2 **Diviser les deux** par ce nombre, et recommencer tant qu'un diviseur commun existe.
 $\frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- 3 **S'arrêter** quand plus aucun diviseur commun n'existe : la fraction est alors **irréductible**. C'est sous cette forme qu'on donne un résultat.
simplifier ne change pas le nombre : $\frac{24}{36}$ et $\frac{2}{3}$ sont deux écritures de la même quantité.

L'ENCADREMENT D'UNE FRACTION ENTRE DEUX ENTIERS

- 1 **Diviser** le numérateur par le dénominateur, en s'arrêtant au quotient entier. Pour $\frac{17}{5}$: $5 \times 3 = 15$ et $5 \times 4 = 20$.
- 2 **Encadrer** : le quotient entier est la borne inférieure, le suivant la borne supérieure.
 $3 < \frac{17}{5} < 4$
- 3 **Contrôler** l'ordre de grandeur : $\frac{17}{5} = 3,4$, bien situé entre 3 et 4.
un encadrement se vérifie en une seconde ; il attrape la plupart des erreurs de calcul.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Simplifier $\frac{15}{20}$ en ne divisant que le numérateur : $\frac{3}{20}$. — diviser un seul des deux termes change le nombre : $\frac{15}{20}$ vaut 0,75 et $\frac{3}{20}$ vaut 0,15. Une fraction ne reste égale à elle-même que si l'on traite ses deux termes de la même façon.

Le réflexe : écrire la division sur les deux lignes en même temps, et contrôler avec la valeur décimale quand elle est simple.

Certaines fractions s'écrivent aussi en décimal, d'autres non. $\frac{3}{4} = 0,75$ et $\frac{7}{2} = 3,5$ tombent juste ; $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ ne s'arrête jamais. La règle est simple : une fraction admet une écriture décimale exacte lorsque son dénominateur, une fois la fraction simplifiée, ne contient que des facteurs 2 et 5 — les diviseurs de 10. Dans les autres cas, la valeur décimale est **approchée**, et il vaut mieux garder la fraction.

PRENDRE UNE FRACTION D'UNE QUANTITÉ

- 1 Diviser la quantité par le **dénominateur** : on obtient la valeur d'une part.
- 2 Multiplier par le **numérateur** : on obtient la valeur du nombre de parts voulu.
diviser d'abord garde les nombres petits ; multiplier d'abord donne le même résultat mais des calculs plus lourds.
- 3 Contrôler : le résultat doit être inférieur à la quantité de départ si la fraction est inférieure à 1.

EXEMPLE

Combien font les trois cinquièmes de 45 € ?

- 1 Une part vaut :
 $45/5 = 9$
- 2 Trois parts valent :
 $9 \times 3 = 27$

27 €

3 Addition et soustraction de fractions

RÈGLE

On n'additionne que des parts **de même taille** : il faut donc le même dénominateur. On additionne alors les numérateurs et on garde le dénominateur — celui-ci indique la taille des parts, il ne s'additionne jamais.

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

EXEMPLE

Calculer $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$.

- ① La soustraction suit exactement la règle de l'addition : il faut d'abord des parts de même taille. Ici 3 divise 6, donc 6 est le dénominateur commun.
- ② On transforme la seconde fraction.
 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
- ③ On soustrait les numérateurs, et le dénominateur ne bouge pas.
 $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$
- ④ On simplifie le résultat.
 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
un résultat se donne toujours sous forme irréductible.

$$\frac{1}{2}$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. — additionner les dénominateurs revient à changer la taille des parts en cours de route. Le contrôle est immédiat : $\frac{1}{2}$ vaut déjà 0,5, la somme ne peut pas valoir $\frac{2}{5} = 0,4$.

Le réflexe : avant tout, réduire au même dénominateur — puis n'additionner que les numérateurs.

À VÉRIFIER

- Pour comparer des décimaux, ai-je complété avec des zéros ?
- Fraction d'une quantité : diviser par le dénominateur, multiplier par le numérateur.
- Même dénominateur avant toute addition — et il ne s'additionne pas.
- Mon résultat est-il plausible par rapport à la quantité de départ ?

À RETENIR

- Comparer des décimaux : **compléter avec des zéros**, puis rang par rang.
- Le **dénominateur** dit la taille des parts, le **numérateur** combien on en prend.
- Une fraction est une **division** : $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0,75$.
- Multiplier ou diviser les deux termes par le même nombre ne change **rien**.
- Fraction d'une quantité : diviser par le dénominateur, multiplier par le numérateur.
- Le dénominateur ne s'additionne **jamais**.
- 50 % = la moitié · 25 % = le quart · 10 % = le dixième.
- Une fraction se donne **irréductible** : on simplifie jusqu'au bout.
- **Encadrer** entre deux entiers vérifie l'ordre de grandeur en une seconde.
- Addition et soustraction : même dénominateur d'abord, numérateurs ensuite.