COURS

Probabilités et hasard — Premiers calculs

6e

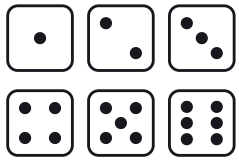
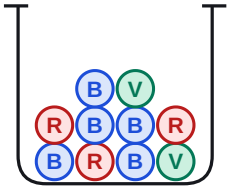
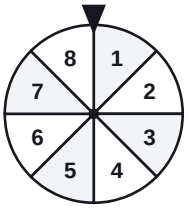
Programme du cycle 3 — arrêté du 10 avril 2025, BO du 17 avril 2025 (Hebdo 16) — MENE2504620A

Au CM2, tu disais « 3 chances sur 10 ». En 6e, ce résultat devient un **nombre** : la fraction $\frac{3}{10}$, ou $0{,}3$, ou $30\,\%$. Tout le chapitre tient en une règle : **quand toutes les issues ont la même chance, la probabilité d'un évènement est le nombre d'issues favorables divisé par le nombre total d'issues ; c'est toujours un nombre entre 0 et 1.**

1 De « 3 chances sur 10 » à un nombre

DÉFINITION

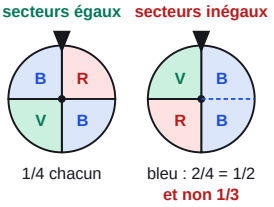
Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel va sortir : lancer un dé, lancer une pièce, tirer une boule sans regarder, faire tourner une roue. Chaque résultat possible est une **issue**. Un **évènement** est ce qu'on attend, par exemple « obtenir un nombre pair » ; les issues qui le réalisent sont les **issues favorables**.

lancer un dé	lancer une pièce	tirer une boule	faire tourner la roue
			
6 issues	**2 issues**	**10 issues**	**8 issues**
1, 2, 3, 4, 5, 6	pile ou face	une par boule	une par secteur

Quatre expériences et leurs issues. Dans l'urne : 3 boules rouges (R), 5 bleues (B) et 2 vertes (V), soit 10 issues, une par boule, et non 3, une par couleur.

DÉFINITION

Quand toutes les issues ont **la même chance** de se réaliser, on parle d'**équiprobabilité**. C'est le cas avec un dé ou une pièce **équilibrés**, des boules **identiques au toucher** et bien mélangées, une roue partagée en secteurs **de même taille**.



À droite, trois couleurs, mais pas trois chances égales : le bleu couvre 2 quarts sur 4.

RÈGLE

Dans une situation d'équiprobabilité, la **probabilité** d'un évènement est le **quotient** du nombre d'issues favorables par le nombre total d'issues. « a chances sur b » devient le nombre $\frac{a}{b}$, qui se lit « a sur b ». On peut l'écrire en **fraction**, en **écriture décimale** ou en **pourcentage**.

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

CALCULER UNE PROBABILITÉ

1. Vérifier que les issues ont toutes la même chance : dé équilibré, boules identiques, secteurs égaux.
2. Compter **toutes** les issues : ce nombre va **en bas** de la fraction.
3. Compter les issues **favorables** : ce nombre va **en haut**.
4. Écrire la fraction, la simplifier si possible, puis la donner en écriture décimale ou en pourcentage si on le demande.

EXEMPLE

On lance un dé équilibré à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

1. Les 6 faces ont la même chance : il y a 6 issues.
2. Les issues favorables sont 2, 4 et 6 : il y en a 3. « 3 chances sur 6 » s'écrit :
$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$$

la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{1}{2}$, soit $0{,}5$ ou $50\,\%$.

EXEMPLE

On tire au hasard une boule dans l'urne de la figure (3 rouges, 5 bleues, 2 vertes). Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? une boule qui n'est pas verte ?

1. Il y a 10 boules, donc 10 issues : une par boule.
2. 3 boules sont rouges :
$$\frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\,\%$$
3. Pas verte, c'est rouge ou bleue : $3 + 5 = 8$ boules.
$$\frac{8}{10} = 0{,}8 = 80\,\%$$

rouge : $\frac{3}{10}$, soit $30\,\%$; pas verte : $\frac{8}{10}$, soit $80\,\%$.

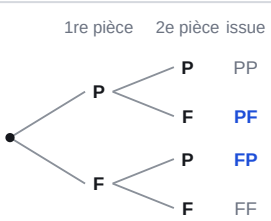
Changer d'écriture. On cherche une fraction égale de dénominateur 10 ou 100 : $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\,\%$. Ou bien on divise : $\frac{5}{8}$, c'est $5 \div 8 = 0{,}625$, soit $62{,}5\,\%$. Certaines probabilités, comme $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, n'ont pas d'écriture décimale : on les laisse en fraction, ou on donne une valeur approchée ($\frac{1}{6}$ vaut environ $0{,}17$, soit environ $17\,\%$).

EXEMPLE

On lance deux pièces équilibrées. Quelle est la probabilité d'obtenir un pile et un face ?

1. Comme au CM2, un arbre recense les issues : PP, PF, FP, FF. Ces 4 issues ont la même chance.
2. Un pile et un face : PF et FP, soit 2 issues favorables.
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

la probabilité est $\frac{1}{2}$, et non $\frac{1}{3}$: « deux piles », « deux faces » et « un de chaque » n'ont pas la même chance.



P pour pile, F pour face. En bleu, les 2 issues favorables sur 4.

PIÈGE

Urne de 1 boule rouge et 3 bleues : « deux couleurs, donc une chance sur deux d'avoir la rouge ». — les deux couleurs n'ont pas la même chance. Les issues sont les 4 boules, pas les 2 couleurs.

Ce que ça coûte : la probabilité est fausse, et tout ce qui en découle.

Le réflexe : compter les **objets** (boules, faces, secteurs égaux), jamais les couleurs ou les noms : ici $\frac{1}{4}$.

PIÈGE

Écrire la fraction à l'envers : $\frac{10}{3}$ pour « 3 chances sur 10 ». — le nombre total d'issues va en bas. $\frac{10}{3}$ est plus grand que 1 : ce n'est pas une probabilité.

Ce que ça coûte : tout le calcul, et les conversions qui suivent.

Le réflexe : favorables en haut, toutes les issues en bas ; puis vérifier que le résultat est entre 0 et 1.

PIÈGE

Écrire $\frac{3}{10} = 3{,}10$, ou $\frac{1}{4} = 0{,}4$. — une fraction n'est pas « le haut, une virgule, le bas ». $\frac{3}{10}$, ce sont 3 dixièmes : $0{,}3$; et $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ce que ça coûte : l'écriture décimale et le pourcentage, même si la fraction était juste.

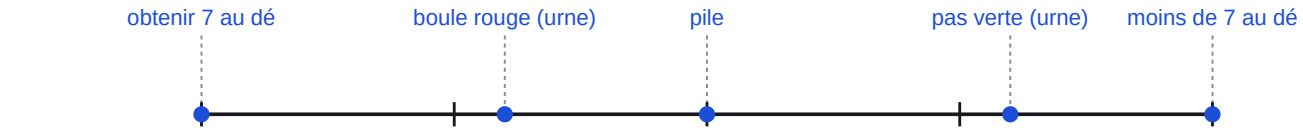
Le réflexe : passer par une fraction de dénominateur 10 ou 100, ou diviser le haut par le bas.

2 Une probabilité est un nombre entre 0 et 1

PROPRIÉTÉ

Une probabilité est toujours un nombre **compris entre 0 et 1** : le nombre d'issues favorables ne peut pas dépasser le nombre total d'issues. Un évènement **impossible** a pour probabilité **0** ; un évènement **certain** a pour probabilité **1**. En pourcentage, une probabilité va de 0 % à 100 %.

$$0 \leq \text{probabilité} \leq 1$$



fraction	**0**	**1/4**	**1/2**	**3/4**	**1**
décimal	0	0,25	0,5	0,75	1
pourcentage	0 %	25 %	50 %	75 %	100 %
en mots	**impossible**	*peu probable*	une chance sur deux	*probable*	**certain**

Les mots du CM1 trouvent leur place sur l'échelle : moins de $\frac{1}{2}$, c'est peu probable ; plus de $\frac{1}{2}$, c'est probable.

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir 7 ? d'obtenir un nombre plus petit que 7 ?

1. Aucune face ne porte 7 : 0 issue favorable sur 6.
$$\frac{0}{6} = 0$$
2. Les 6 faces portent un nombre plus petit que 7 :
$$\frac{6}{6} = 1$$

obtenir 7 est impossible (probabilité 0) ; obtenir moins de 7 est certain (probabilité 1).

COMPARER DEUX PROBABILITÉS

1. Calculer chaque probabilité sous forme de fraction.
2. Les écrire de la même façon : même dénominateur, écriture décimale ou pourcentage.
3. La plus grande désigne l'évènement qui a **le plus de chances** de se réaliser.

EXEMPLE

Sac A : 2 billes gagnantes sur 5 billes. Sac B : 3 billes gagnantes sur 10. Dans quel sac vaut-il mieux tirer ?

1. Sac A :
$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$
2. Sac B :
$$\frac{3}{10} = 0{,}3$$
3. $0{,}4$ est plus grand que $0{,}3$.

il vaut mieux tirer dans le sac A (40 %), même s'il contient moins de billes gagnantes que le sac B (30 %).

PIÈGE

« Le sac B a 3 billes gagnantes, le sac A seulement 2 : B est meilleur. » — on compare des parts du total, pas des nombres de billes : 3 sur 10, c'est moins que 2 sur 5.

Ce que ça coûte : le choix, et sa justification.

Le réflexe : toujours diviser par le total avant de comparer.

PIÈGE

« La probabilité est $0{,}01$: ça n'arrivera jamais. » — $0{,}01$ est petit, mais ce n'est pas 0 : l'évènement est peu probable, pas impossible.

Ce que ça coûte : la conclusion de l'exercice.

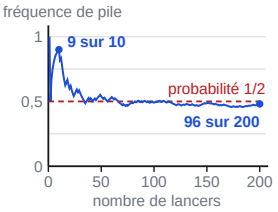
Le réflexe : seule la probabilité 0 veut dire « impossible ».

3 Répéter l'expérience : fréquence et probabilité

DÉFINITION

On répète une expérience un certain nombre de fois et on compte combien de fois l'évènement s'est produit. La **fréquence** de l'évènement est le quotient de ce nombre par le nombre d'essais. Comme une probabilité, c'est un nombre entre 0 et 1, en fraction, en écriture décimale ou en pourcentage. Mais la probabilité se **calcule** avant de jouer ; la fréquence s'**observe** après.

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre de fois où l'évènement s'est produit}}{\text{nombre d'essais}}$$



Fréquence de pile après chaque lancer, sur une série de 200 lancers tirée au hasard par ordinateur.

PROPRIÉTÉ

La fréquence **change** d'une série d'essais à l'autre : c'est le hasard. Sur peu d'essais, elle peut être loin de la probabilité sans que rien ne soit anormal. Quand le nombre d'essais devient **grand**, la fréquence **se rapproche**, en général, de la probabilité. Sur la figure, 200 lancers d'une pièce : 9 piles sur les 10 premiers ($0{,}9$), puis 96 sur 200 ($0{,}48$).

COMPARER DES RÉSULTATS À UNE PROBABILITÉ

1. Calculer la probabilité de l'évènement.
2. Calculer la fréquence observée : nombre de fois où l'évènement s'est produit, divisé par le nombre d'essais.
3. Écrire les deux nombres de la même façon, en écriture décimale ou en pourcentage, et les comparer.
4. Conclure avec prudence : un écart sur **peu** d'essais est normal ; un grand écart sur **beaucoup** d'essais fait douter que les issues aient la même chance (dé truqué, boules mal mélangées).

EXEMPLE

Zoé lance 50 fois un dé et obtient 9 fois le 6. Compare la fréquence du 6 à sa probabilité.

1. Avec un dé équilibré, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{6}$:
   $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$
2. Fréquence observée du 6 :
   $\frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 0{,}18 = 18\,\%$
3. $0{,}18$ et environ $0{,}17$ sont très proches.

les résultats de Zoé sont tout à fait compatibles avec un dé équilibré.

PIÈGE

« Sur 10 lancers, j'ai eu 7 piles : la probabilité d'obtenir pile est $0{,}7$. » — $0{,}7$ est une **fréquence**, observée sur 10 lancers ; elle change à chaque série. La probabilité reste $\frac{1}{2}$.

Ce que ça coûte : la réponse, et la confusion revient à chaque exercice.

Le réflexe : « fréquence » pour ce qu'on a observé, « probabilité » pour ce qu'on a calculé.

PIÈGE

« Après cinq piles de suite, face est en retard : elle a plus de chances de sortir. » — la pièce ne se souvient pas des lancers précédents. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{2}$.

Ce que ça coûte : tout le raisonnement.

Le réflexe : chaque lancer repart de zéro.

PIÈGE

« Sur 20 lancers, j'ai eu 13 piles au lieu de 10 : la pièce est truquée. » — sur 20 lancers, un tel écart n'a rien d'étonnant avec une pièce équilibrée.

Ce que ça coûte : une conclusion fausse.

Le réflexe : ne soupçonner un trucage qu'après un **grand** nombre d'essais.

À VÉRIFIER

- Les issues ont-elles **toutes la même chance** ?
- Ai-je compté les **objets** (boules, faces, secteurs égaux), pas les couleurs ?
- **Favorables en haut**, toutes les issues en bas ?
- Résultat **entre 0 et 1**, ou entre 0 % et 100 % ?
- **Fréquence** observée ou **probabilité** calculée ?
- Peu d'essais : pas de conclusion hâtive ?

À RETENIR

- Probabilité $= \frac{\text{issues favorables}}{\text{toutes les issues}}$, quand toutes les issues ont la même chance.
- « a chances sur b » s'écrit $\frac{a}{b}$: en fraction, en décimal ou en pourcentage.
- Une probabilité est entre **0** (impossible) et **1** (certain).
- On compte les **objets** (boules, faces, secteurs égaux), pas les couleurs.
- Fréquence = nombre de réussites ÷ nombre d'essais ; sur **beaucoup** d'essais, elle se rapproche de la probabilité.
- Le dé **ne se souvient pas** des lancers précédents.