

Proportionnalité et échelle

Programme du cycle 3 — BO n°31 du 30 juillet 2020

Deux grandeurs sont proportionnelles quand **si l'une double, l'autre double aussi**. Trois pains coûtent trois fois le prix d'un pain — mais un enfant de six ans ne mesure pas trois fois un enfant de deux ans. Savoir distinguer les deux cas est le seul vrai enjeu du chapitre.

1 Reconnaître la proportionnalité

le coefficient doit être le même partout — on teste toutes les colonnes

proportionnel			
pains	2	5	8
€	2,40	6	9,60
$2,40 \div 2 = 6 \div 5 = 9,60 \div 8 = 1,20$			

non proportionnel			
âge	2	6	10
cm	85	118	140
42,5 puis 19,7 puis 14 : rien ne colle			

un seul quotient différent suffit à conclure que ce n'est pas proportionnel

Le test se fait sur toutes les colonnes — une seule ne prouve rien.

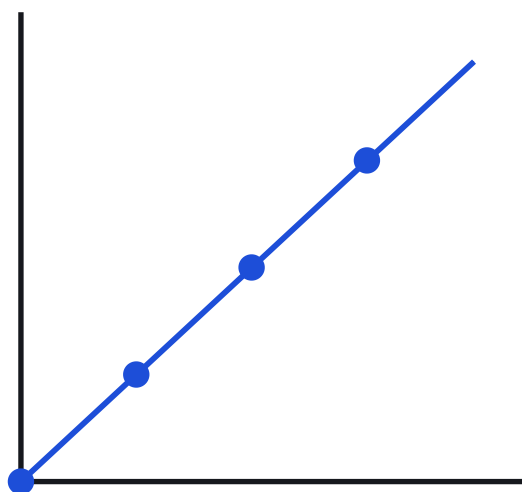
DÉFINITION

Le nombre par lequel on multiplie chaque valeur de la première ligne pour obtenir celle de la seconde. Il est **le même pour toutes les colonnes** : c'est la définition même de la proportionnalité, et le seul test à connaître.

RÈGLE

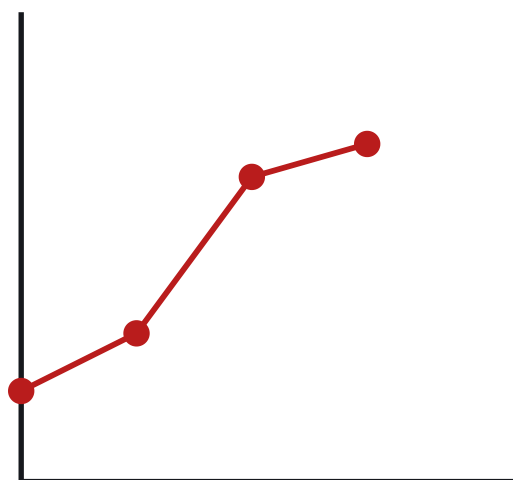
La **reconnaissance d'une situation de proportionnalité** se fait de deux façons, et il faut savoir les deux. Sur un **tableau** : on divise chaque valeur de la seconde ligne par celle de la première, et l'on vérifie qu'on trouve toujours le même nombre — le coefficient. Sur un **graphique** : les points sont proportionnels si et seulement s'ils sont **alignés** et si la droite **passe par l'origine**. Les deux conditions comptent : des points alignés sur une droite qui ne part pas de zéro ne sont pas proportionnels.

alignés, et passant par l'origine



proportionnel

ni alignés, ni issus de l'origine



non proportionnel

Alignés et passant par l'origine : les deux conditions, pas une seule.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Conclure à la proportionnalité parce que les points sont alignés. — un abonnement à 10 € par mois plus 15 € d'inscription donne des points parfaitement alignés — et pourtant doubler la durée ne double pas le prix. La droite ne part pas de l'origine.

Le réflexe : vérifier la valeur pour zéro : si elle n'est pas nulle, il n'y a pas proportionnalité, quel que soit l'alignement.

2 La règle de trois

TROUVER UNE VALEUR MANQUANTE

- 1 Vérifier que la situation est bien proportionnelle. Sans cela, tout le reste est faux.
- 2 Passer par l'**unité** : diviser pour connaître la valeur de 1, puis multiplier.
cette méthode fonctionne toujours et se contrôle facilement, contrairement au produit en croix appliqué mécaniquement.
- 3 Contrôler l'ordre de grandeur : si on demande plus, on doit trouver plus.

EXEMPLE

5 cahiers coûtent 7,50 €. Combien coûtent 8 cahiers ?

- 1 Un cahier coûte :
 $7,5/5 = 1,5$
- 2 Huit cahiers coûtent :
 $1,5 \times 8 = 12$
- 3 Contrôle : 8 est plus que 5, et 12 € est plus que 7,50 €. Cohérent.

12 €

3 Les échelles

DÉFINITION

Une échelle est un coefficient de proportionnalité entre le **plan** et la **réalité**. Une échelle de $\frac{1}{200}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 200 cm en vrai, soit 2 m. Une échelle n'a **pas d'unité** : les deux longueurs doivent donc être exprimées dans la même.

l'échelle est un coefficient : du plan vers le réel, on multiplie



dans l'autre sens on divise — et une échelle n'a jamais d'unité

Du plan vers le réel on multiplie, du réel vers le plan on divise.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Croire qu'une échelle de $\frac{1}{100}$ donne un plan plus grand qu'une échelle de $\frac{1}{25}$. — plus le dénominateur est grand, plus la réduction est forte. Au $\frac{1}{100}$, un mètre réel tient dans 1 cm ; au $\frac{1}{25}$, il occupe 4 cm. La seconde carte est donc plus grande et plus détaillée.

Le réflexe : traduire l'échelle en phrase : « 1 cm représente... ». Le nombre obtenu dit tout.

La proportionnalité sert aussi aux **conversions** : passer des mètres aux centimètres, des heures aux minutes, des euros aux centimes. Chaque table de conversion est un tableau de proportionnalité dont le coefficient est 10, 60 ou 100.

Un **pourcentage** est une proportionnalité déguisée : « 15 % » signifie « 15 pour 100 », donc un coefficient de $\frac{15}{100} = 0,15$. Prendre 15 % d'une quantité, c'est la multiplier par 0,15 — et la règle de trois s'applique telle quelle.

À VÉRIFIER

- Le coefficient est-il le même pour **toutes** les colonnes ?
- Ai-je vérifié la proportionnalité avant d'appliquer la règle de trois ?
- Pour une échelle : les deux longueurs sont-elles dans la même unité ?
- Plus je demande, plus je dois trouver — mon résultat est-il cohérent ?

À RETENIR

- Proportionnel = **même coefficient sur toutes les colonnes**.
- Un seul quotient différent suffit à conclure que ce n'est pas proportionnel.
- **Règle de trois** : passer par l'unité — diviser, puis multiplier.
- Une **échelle** n'a pas d'unité : convertir avant de calculer.
- Du plan vers le réel on **multiplie**, du réel vers le plan on **divise**.
- Plus le dénominateur d'une échelle est grand, plus la réduction est forte.