CORRIGÉ

Tle

Corrigé détaillé
8 exercices

Dénombrement — k-uplets, permutations, combinaisons

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Calculer sans calculatrice, en simplifiant d'abord.

1. **a.** Par définition :
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$
2. **b.** $10! = 10 \times 9 \times 8!$, donc :
$\frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$
3. **c.** Avec la formule pour $k = 2$:
$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$
par symétrie, $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$.
4. **d.** Trois facteurs au numérateur, $3!$ au dénominateur :
$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$
5. **e.** C'est la somme de la ligne 5 du triangle de Pascal, qui vaut 2^5 :
$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$
6. Conclusion : $6! = 720$, $\dfrac{10!}{8!} = 90$, $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$, $\binom{10}{3} = 120$, et la somme vaut 32.

2 Pour chaque situation, dire si l'ordre compte et si les répétitions sont possibles, nommer l'objet compté, puis dénombrer.

1. **a.** L'ordre compte et les répétitions sont permises : des 3-uplets d'un ensemble à 26 éléments.
$26^3 = 17\,576$
2. **b.** L'ordre compte (les postes sont différents), sans répétition : des triplets de membres distincts.
$12 \times 11 \times 10 = 1\,320$
3. **c.** Un match est une paire d'équipes, sans ordre : une partie à 2 éléments.
$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$
4. **d.** Un rangement est une permutation des 6 livres, $6!$:
$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
5. Conclusion : 17 576 codes, 1 320 bureaux, 28 matchs et 720 rangements.

3 Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

1. **a. Vrai.** Une partie à 1 élément est un singleton $\{x\}$: il y en a un par élément de l'ensemble, soit n.
2. **b. Faux.** Avec $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$, $A \times B = \{(1, 2)\}$ et $B \times A = \{(2, 1)\}$, or $(1, 2) \neq (2, 1)$. Les deux ensembles ont seulement le même cardinal.
3. **c. Faux.** Il en possède 2^5 :
$2^5 = 32$
10 est le nombre de ses parties à 2 éléments, ou à 3 éléments.
4. **d. Vrai.** Par symétrie, $\binom{12}{9} = \binom{12}{3}$:
$\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$
5. **e. Faux.** Par convention, $0! = 1$; c'est ce qui donne $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$, le nombre de parties vides.
6. **f. Vrai.** $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$ et $n! \neq 0$, donc le quotient vaut $n + 1$, y compris pour $n = 0$: $\dfrac{1!}{0!} = 1$.

4 **Génétique. Un brin d'ADN est une suite de bases, chacune choisie parmi A, C, G et T. Un codon est une suite de 3 bases.**

1. **a.** Un codon est un 3-uplet de l'ensemble des 4 bases :
$4^3 = 64$
2. **b.** Ce sont les 3-uplets d'éléments distincts :
$4 \times 3 \times 2 = 24$
3. **c.** On choisit les 3 places des A parmi les 10, soit $\binom{10}{3} = 120$ choix, **puis** une base parmi C, G et T pour chacune des 7 autres places :
$120 \times 3^7 = 120 \times 2\,187 = 262\,440$
4. **d.** Le contraire de « au moins un A » est « aucun A », soit 3^{10} suites parmi les 4^{10} :
$4^{10} - 3^{10} = 1\,048\,576 - 59\,049 = 989\,527$
5. Conclusion : 64 codons, dont 24 à bases distinctes ; 262 440 suites de 10 bases avec exactement 3 A, et 989 527 avec au moins un A.

---

5 **On va de O à B en suivant les lignes du quadrillage, par des pas d'une case vers la droite (D) ou vers le haut (H). B est 4 cases à droite et 3 cases au-dessus de O ; C est 2 cases à droite et 1 case au-dessus de O.**

1. **a.** Le chemin rouge s'écrit DDDHHDH. Tout chemin de O à B compte 4 lettres D et 3 lettres H, soit 7 lettres.
2. **b.** Un chemin est un mot de 7 lettres, déterminé par la partie formée des 3 places de ses H :
$\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$
3. **c.** De O à C : 3 lettres dont 1 H, soit $\binom{3}{1} = 3$ chemins ; de C à B : 4 lettres dont 2 H, soit $\binom{4}{2} = 6$ chemins. On enchaîne les deux choix :
$3 \times 6 = 18$
4. **d.** Passer par C ou non : deux cas disjoints qui réunissent tous les chemins, donc par complémentaire :
$35 - 18 = 17$
5. Conclusion : 35 chemins de O à B, dont 18 passent par C et 17 l'évitent.

---

6 **Repérer l'erreur. On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes, qui compte 8 cœurs. Lina dénombre les mains qui contiennent au moins un cœur : « je choisis un cœur (8 choix), puis 2 cartes parmi les 31 restantes, soit $8 \times \binom{31}{2} = 3\,720$ mains ».**

1. **a.** Une main est une partie à 3 éléments du jeu :
$\binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30}{6} = 4\,960$
2. Une main sans cœur est formée de 3 cartes parmi les 24 autres :
$\binom{24}{3} = \frac{24\times23\times22}{6} = 2\,024$
3. **b.** Par complémentaire :
$4\,960 - 2\,024 = 2\,936$
Lina trouve 3 720 : son résultat est faux.
4. **c.** Il y a $8 \times \binom{24}{2} = 8 \times 276 = 2\,208$ mains à 1 cœur, $\binom{8}{2} \times 24 = 28 \times 24 = 672$ mains à 2 cœurs et $\binom{8}{3} = 56$ mains à 3 cœurs, soit 2 936 en tout. Lina compte une main à 2 cœurs **deux fois**, une pour chaque cœur « choisi », et une main à 3 cœurs trois fois :
$2\,208 + 2 \times 672 + 3 \times 56 = 3\,720$
5. **d.** Nombre de mains favorables sur nombre de mains possibles :
$\frac{2\,936}{4\,960} \approx 0{,}59$
6. Conclusion : 2 936 mains contiennent au moins un cœur, et non 3 720 ; la probabilité d'au moins un cœur vaut environ 0,59.

---

7 Algorithmique. On reprend la fonction `pascal` et la liste `P2` du cours, avec `E = ["a", "b", "c", "d"]`.

1. **a.** `L` vaut successivement `[1]`, `[1, 1]`, `[1, 2, 1]`, `[1, 3, 3, 1]` et `[1, 4, 6, 4, 1]` : chaque nouvelle ligne ajoute deux à deux les voisins de la précédente, par la relation de Pascal, et l'appel renvoie la ligne 4 du triangle.
2. **b.** `P2` vaut `[("a", "b"), ("a", "c"), ("a", "d"), ("b", "c"), ("b", "d"), ("c", "d")]` : un couple par partie à 2 éléments, écrite dans l'ordre alphabétique.
   $\binom{4}{2} = \frac{4\times3}{2} = 6$
3. **c.** Avec `x != y`, on obtient tous les couples d'éléments distincts : chaque partie $\{x, y\}$ apparaît deux fois, comme (x, y) et comme (y, x).
   $4 \times 3 = 12 = 2 \times 6$
4. **d.** `P3` contient un triplet (x, y, z) avec $x < y < z$ par partie à 3 éléments :
   $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$
5. Conclusion : `pascal(4)` renvoie `[1, 4, 6, 4, 1]` ; `P2` a 6 éléments, 12 avec `x != y` ; `P3` en aurait 20.

---

8 Soit n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. On veut démontrer de deux façons que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

1. **a.** Comme $k! = k \times (k-1)!$, on a $k\binom{n}{k} = \dfrac{k \times n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$.
2. De même, comme $(n-1) - (k-1) = n - k$ et $n \times (n-1)! = n!$, on a $n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$: les deux membres sont égaux.
3. **b.** Le comité d'abord : $\binom{n}{k}$ choix du comité, puis k choix du président parmi ses membres, soit $k\binom{n}{k}$ possibilités.
4. Le président d'abord : n choix, puis les $k-1$ autres membres parmi les $n-1$ restants, soit $n\binom{n-1}{k-1}$. On a dénombré deux fois le même ensemble, d'où l'égalité.
5. **c.** Le comité d'abord, avec $\binom{10}{4} = 210$:
   $4 \times 210 = 840$
6. Le président d'abord, avec $\binom{9}{3} = 84$:
   $10 \times 84 = 840$
7. Conclusion : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, et le club peut former son comité de 840 façons.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Identifier l'objet compté : k-uplet, k-uplet d'éléments distincts, permutation, partie	4 pts	L'ordre pris en compte pour une main ou un groupe (résultat multiplié par $k!$) ; n^k pour des tirages sans remise
Appliquer les principes additif et multiplicatif	4 pts	Ajouter des cas qui se chevauchent ; « au moins un » compté par un produit qui compte certains cas plusieurs fois
Calculer factorielles et coefficients binomiaux	4 pts	Une grande factorielle calculée au lieu d'être simplifiée ; $0! = 0$; la symétrie ignorée
Démontrer : nombre de parties, relation de Pascal, somme d'une ligne	5 pts	Un exemple numérique présenté comme une preuve ; des ensembles ajoutés sans dire qu'ils sont disjoints
Algorithme : triangle de Pascal, parties, permutations	3 pts	Indices décalés dans la boucle ; `x != y` au lieu de `x < y` pour écrire des parties