COURS

Dénombrement — k-uplets, permutations, combinaisons

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Combien de codes à quatre chiffres, de podiums, de mains de cinq cartes ? Dénombrer, c'est compter sans tout écrire, en reconnaissant d'abord l'objet compté. **Si l'ordre compte, on compte des k-uplets : n^k avec répétitions, $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ sans répétition ; si l'ordre ne compte pas, on compte des parties à k éléments : $\binom{n}{k}$.**

1 Ensembles, k-uplets et principes de comptage

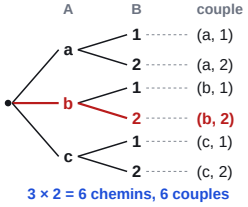
DÉFINITION

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est son **cardinal**, $\mathrm{card}(E)$. Une **partie** A de E ($A \subset E$) est un ensemble dont tous les éléments sont dans E ; $\varnothing$ et E en sont deux. La **réunion** $A \cup B$, l'**intersection** $A \cap B$ et le **complémentaire** $\overline{A} = E \setminus A$ s'emploient comme en probabilités ; A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$. Pour des ensembles quelconques A et B, un **couple** (a, b) est formé d'un élément a de A **puis** d'un élément b de B : l'**ordre compte**, $(1,2) \neq (2,1)$, et les répétitions sont permises, $(1,1)$ est un couple. Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble de ces couples. De même, $A \times B \times C$ est l'ensemble des **triplets**, $A_1 \times \cdots \times A_k$ celui des **k-uplets** (ou k-listes), et A^k celui des k-uplets d'éléments de A : $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.

PROPRIÉTÉ

Principes additif et multiplicatif (admis). Si $A_1, \ldots, A_p$ sont finis et **deux à deux disjoints**, le cardinal de leur réunion est la **somme** de leurs cardinaux ; ainsi $\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$. Le cardinal d'un produit cartésien est le **produit** des cardinaux ; en particulier, si $\mathrm{card}(E) = n$, il y a n^k k-uplets d'éléments de E. Ce principe vaut pour des **choix successifs** : si le 1er choix offre n_1 possibilités, puis le 2e n_2 quel que soit le premier, etc., il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ résultats.

$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B) \qquad \mathrm{card}(E^k) = n^k$$



$A \times B$ avec $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$: un chemin de l'arbre, un couple.

DÉNOMBRER AVEC LES DEUX PRINCIPES

1. **Reconnaître l'objet** — liste ordonnée (un code, un classement) ou ensemble (une main, un groupe) ? répétitions permises ? — puis **découper en cas disjoints** et ajouter ; devant « au moins un », passer au **complémentaire**.
2. **Décomposer en choix successifs** et multiplier, en vérifiant que le nombre de possibilités d'une étape ne dépend pas des choix précédents ; contrôler sur un petit cas, par un arbre ou une liste.

EXEMPLE

Un mot de passe compte 4 caractères, chacun une lettre minuscule (26 possibles) ou un chiffre (10 possibles). Combien y en a-t-il ? Combien contiennent au moins un chiffre ?

1. Un mot de passe est un 4-uplet des 36 caractères : il y en a $36^4 = 1\,679\,616$. « Au moins un chiffre » est le contraire de « que des lettres », qui en compte 26^4 :
   $36^4 - 26^4 = 1\,679\,616 - 456\,976 = 1\,222\,640$

1 679 616 mots de passe, dont 1 222 640 avec au moins un chiffre.

PIÈGE

« Au moins un chiffre : 4 places pour le chiffre, 10 chiffres, puis 36^3 pour le reste, soit $4 \times 10 \times 36^3 = 1\,866\,240$. » — 7a3b est compté deux fois, avec le 7 puis avec le 3 « choisi » : le résultat dépasse même le total.

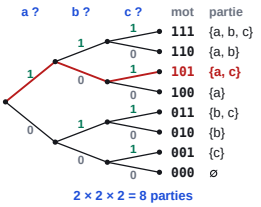
Ce que ça coûte : toute la question, et la probabilité calculée ensuite

Le réflexe : devant « au moins un », passer au complémentaire, ou découper en cas **disjoints** : exactement 1, 2, 3 ou 4 chiffres.

2 Les parties d'un ensemble

PROPRIÉTÉ

Nombre de parties (démontré). Un ensemble $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ à n éléments possède 2^n parties. *Preuve* : à une partie P, on associe le n-uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\{0,1\}^n$, où $\varepsilon_i = 1$ si $x_i \in P$ et $\varepsilon_i = 0$ sinon. Chaque n-uplet code une seule partie et réciproquement : c'est une **bijection**, donc il y a autant de parties que de n-uplets, soit 2^n. Ce nombre compte aussi les **mots de longueur** n sur un alphabet à deux lettres, les **chemins** d'un arbre à n niveaux de deux branches, et les **issues** de n épreuves de Bernoulli : l'issue SSES (S succès, E échec) est associée à la partie $\{1, 2, 4\}$ des rangs des succès.



Les $2^3 = 8$ parties de $\{a, b, c\}$: un chemin, un mot de 0 et de 1, une partie. En rouge, 101 code $\{a, c\}$.

EXEMPLE

Une pizzeria propose 6 garnitures, à choisir librement. Combien de pizzas différentes ? Combien avec au moins une garniture ?

1. Une pizza est une partie de l'ensemble des 6 garnitures ; seule $\varnothing$ n'a aucune garniture :
   $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

64 pizzas, dont 63 avec au moins une garniture.

PIÈGE

« Un ensemble à 6 éléments a $2 \times 6 = 12$ parties », ou oublier $\varnothing$ et E. — chaque élément est dans la partie ou non : on **multiplie** par 2 à chaque élément, d'où $2^6 = 64$, $\varnothing$ et E compris.

Ce que ça coûte : le dénombrement, et toute probabilité qui en dépend

Le réflexe : contrôler sur $\{a, b\}$: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, soit $2^2 = 4$ parties.

3 Listes d'éléments distincts, permutations, factorielle

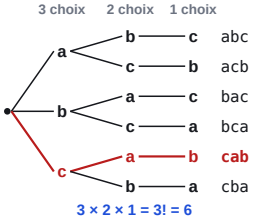
DÉFINITION

Pour tout entier $n \geqslant 1$, **factorielle** n est le produit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, et l'on pose $0! = 1$. Ainsi $(n+1)! = (n+1) \times n!$; les valeurs croissent très vite : $10! = 3\,628\,800$.

PROPRIÉTÉ

k-uplets d'éléments distincts, permutations (démontré). Soit E un ensemble à n éléments et $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour un k-uplet d'éléments **distincts**, on a n choix pour le 1er terme, $n-1$ pour le 2e, …, $n-k+1$ pour le k-ième. Par le principe multiplicatif, leur nombre est le produit de ces k facteurs ; en le complétant par $(n-k)!$, on obtient $n!$, d'où la seconde écriture (pour $k > n$, il n'y en a aucun). **Permutations** : une permutation de E est un n-uplet formé de ses n éléments, chacun une fois, c'est-à-dire une façon de les **ranger** ; avec $k = n$, E possède $n!$ permutations.

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$



Les permutations de $\{a, b, c\}$: à chaque niveau, un choix de moins.

TIRER K OBJETS PARMI N, UN PAR UN

1. **Avec remise** : l'ordre compte et un objet peut revenir ; on compte des k-uplets, n^k.
2. **Sans remise** : l'ordre compte, sans répétition ; $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, que l'on calcule en simplifiant : $\frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$, sans jamais calculer $10!$.

   un tirage **simultané** ne donne pas une liste mais une partie : voir la partie 4.

EXEMPLE

Huit nageurs disputent une finale. Combien de podiums (or, argent, bronze) sont possibles ? De combien de façons peut-on attribuer les 8 couloirs aux 8 nageurs ?

1. Un podium est un triplet de nageurs **distincts**, dans l'ordre or, argent, bronze : $8 \times 7 \times 6 = 336$. Attribuer les couloirs, c'est ranger les 8 nageurs, une permutation :
   $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$

336 podiums et 40 320 répartitions des couloirs.

PIÈGE

« Codes de 4 chiffres tous différents : $10^4 = 10\,000$. » — 10^4 compte **tous** les 4-uplets, répétitions comprises, comme 7701. Sans répétition, le nombre de choix baisse d'un à chaque rang : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

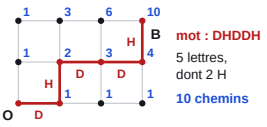
Ce que ça coûte : le résultat, et la probabilité qui en dépend

Le réflexe : à chaque rang, se demander combien de choix **restent**.

4 Combinaisons et coefficients binomiaux

DÉFINITION

Soit E un ensemble à n éléments et $0 \leqslant k \leqslant n$. Une **combinaison de k éléments de E** est une **partie** de E à k éléments : l'**ordre ne compte pas** et il n'y a pas de répétition. Leur nombre se note $\binom{n}{k}$, lu « k parmi n » : c'est un **coefficient binomial**. Il compte aussi les **mots de longueur** n formés de k lettres H et $n-k$ lettres D (on choisit les places des H), les **chemins** d'un quadrillage faits de k pas vers le haut et $n-k$ vers la droite, et les issues de n épreuves de Bernoulli qui comptent **exactement k succès**.



3 pas D et 2 pas H : $\binom{5}{2} = 10$ chemins de O à B. En bleu, le nombre de chemins qui mènent à chaque point.

PROPRIÉTÉ

Formules, cas particuliers, symétrie (démontrés). Pour $k \geqslant 1$, ranger de toutes les façons ($k!$) chaque partie à k éléments donne chaque k-uplet d'éléments distincts une fois : $\binom{n}{k} \times k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, et l'on divise par $k!$. Pour $k = 0$, les deux membres valent 1. **Cas particuliers** : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$. **Symétrie** : $A \mapsto \overline{A}$ est une bijection des parties à k éléments sur celles à $n-k$ éléments, donc $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

EXEMPLE

Dans une classe de 12 filles et 10 garçons, on choisit 3 élèves pour un conseil, sans fonction distincte. Combien de choix ? Combien avec exactement 2 filles ?

1. Un choix est une partie à 3 éléments des 22 élèves : $\binom{22}{3} = (22 \times 21 \times 20) \div 6 = 1\,540$. Avec 2 filles parmi 12, **puis** 1 garçon parmi 10 :
   $\binom{12}{2} \times \binom{10}{1} = 66 \times 10 = 660$

1 540 choix, dont 660 avec exactement 2 filles.

DÉNOMBRER UN TIRAGE SIMULTANÉ

1. **Test de l'échange** : si échanger deux objets ne change rien, l'ordre ne compte pas : on compte des parties.
2. **Traduire les contraintes** : « exactement 2 filles » : choix successifs, on multiplie ; « au moins une » : complémentaire.

PIÈGE

« Mains de 3 cartes d'un jeu de 32 : $32 \times 31 \times 30 = 29\,760$. » — une main est un **ensemble** : le produit compte chacune dans ses $3! = 6$ ordres, et il y a $29\,760 \div 6 = 4\,960$ mains.

Ce que ça coûte : un résultat multiplié par $k!$, et la probabilité qui en dépend

Le réflexe : un tirage simultané se compte avec $\binom{n}{k}$.

5 Relation et triangle de Pascal

PROPRIÉTÉ

Relation de Pascal (démontrée de deux façons). Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. *Par le calcul* : on réduit au dénominateur $(k+1)!\,(n-k)!$, ci-dessous. *Par dénombrement* : dans un ensemble à $n+1$ éléments, fixons a. Parmi les parties à $k+1$ éléments, $\binom{n}{k}$ contiennent a (on choisit les k autres parmi les n restants) et $\binom{n}{k+1}$ ne le contiennent pas. Ces deux ensembles sont disjoints : on ajoute.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	2^n
0	1							1
1	1	1						2
2	1	2	1					4
3	1	3	3	1				8
4	1	4	6	4	1			16
5	1	5	10	10	5	1		32
6	1	6	15	20	15	6	1	64

Triangle de Pascal : $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20 = \binom{6}{3}$, sous le second terme. À droite, la somme de chaque ligne.

PROPRIÉTÉ

Somme d'une ligne (démontrée par dénombrement). Selon leur nombre d'éléments $k = 0, 1, \dots, n$, les parties d'un ensemble E à n éléments se répartissent en $n+1$ ensembles deux à deux disjoints, de cardinaux $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Par le principe additif, leur somme est le nombre total de parties de E : 2^n.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

CONSTRUIRE LE TRIANGLE DE PASCAL

1. **Bords puis intérieur** : chaque ligne commence et finit par 1 ; dans le triangle aligné à gauche, chaque autre coefficient est la somme de celui qui est juste au-dessus et du voisin de gauche de ce dernier.
2. **Contrôler** : chaque ligne est symétrique, et sa somme vaut 2^n.

EXEMPLE

La ligne 6 du triangle est 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Écrire la ligne 7, puis donner le nombre de parties à 3 éléments d'un ensemble à 7 éléments.

1. On ajoute les voisins de la ligne 6 : $1+6=7$, $6+15=21$, $15+20=35$, puis la symétrie complète la ligne. Contrôle : $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$

ligne 7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, donc $\binom{7}{3} = 35$.

ligne n du triangle, par la relation de Pascal

```
def pascal(n):
    L = [1]                  # ligne 0
    for m in range(n):
        M = [1]
        for k in range(1, m + 1):
            M.append(L[k-1] + L[k])
        M.append(1)
        L = M                # ligne m + 1
    return L
print(pascal(5))   # [1, 5, 10, 10, 5, 1]
```

parties à 2, 3 éléments ; permutation au hasard

```
E = ["a", "b", "c", "d"]
P2 = [(x, y) for x in E for y in E if x < y]
P3 = [(x, y, z) for x in E for y in E
      for z in E if x < y < z]
print(len(P2), len(P3))       # 6 4
from random import randint
def melange(L):    # permutation au hasard
    L = list(L)
    for i in range(len(L) - 1, 0, -1):
        j = randint(0, i)    # 0 <= j <= i
        L[i], L[j] = L[j], L[i]
    return L
```

À gauche, chaque ligne vient de la précédente par la relation de Pascal. À droite, la condition x < y écrit chaque partie une seule fois, $\binom{4}{2} = 6$ et $\binom{4}{3} = 4$; melange offre $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 = n!$ suites de tirages, une par permutation : toutes ont la même chance de sortir.

PIÈGE

Écrire $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$, ou ajouter deux coefficients de lignes différentes. — les deux termes ajoutés sont **voisins sur la ligne** n ; leur somme est sur la ligne $n+1$, au rang du second, $k+1$.

Ce que ça coûte : la démonstration, ou toute la ligne du triangle

Le réflexe : tester sur le triangle : $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3 = \binom{3}{1}$.

À VÉRIFIER

- L'ordre compte-t-il ? Les répétitions sont-elles permises ?
- « Au moins un » : complémentaire, ou cas **disjoints** ?
- Le même nombre de choix à chaque étape, quels que soient les précédents ?
- Un contrôle sur un petit cas, par un arbre ou une liste ?

À RETENIR

- Disjoints : on **ajoute** ; produit cartésien : on **multiplie**.
- k-uplets : n^k ; parties : 2^n ; k-uplets d'éléments distincts : $n(n-1)\cdots(n-k+1)$; permutations : $n!$, et $0! = 1$.
- Parties à k éléments : $\binom{n}{k} = n!/\big(k!\,(n-k)!\big)$; $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$; ligne n : somme 2^n.