EXERCICES

Dénombrement — k-uplets, permutations, combinaisons

Tle

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Calculer sans calculatrice, en simplifiant d'abord.

●○○

a. $6!$

b. $\dfrac{10!}{8!}$

c. $\binom{7}{2}$, puis $\binom{7}{5}$

d. $\binom{10}{3}$

e. $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

2 Pour chaque situation, dire si l'ordre compte et si les répétitions sont possibles, nommer l'objet compté, puis dénombrer.

●○○

a. Les codes de 3 lettres de l'alphabet (26 lettres), comme ZAZ.

b. Les bureaux (un président, un trésorier, un secrétaire) élus parmi les 12 membres d'une association.

c. Les matchs d'un tournoi où chacune des 8 équipes rencontre une fois chacune des autres.

d. Les façons de ranger 6 livres différents sur une étagère.

3 Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse. ●●○

a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$.

b. Pour tous ensembles A et B, $A \times B = B \times A$.

c. Un ensemble à 5 éléments possède 10 parties.

d. $\binom{12}{9} = 220$.

e. $0! = 0$.

f. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n + 1$.

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$.		
b. Pour tous ensembles A et B, $A \times B = B \times A$.		
c. Un ensemble à 5 éléments possède 10 parties.		
d. $\binom{12}{9} = 220$.		
e. $0! = 0$.		
f. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n + 1$.		

4 Génétique. Un brin d'ADN est une suite de bases, chacune choisie parmi A, C, G et T. Un codon est une suite de 3 bases. ●●○

a. Combien de codons différents existe-t-il ?

b. Combien de codons sont formés de 3 bases distinctes ?

c. Combien de suites de 10 bases contiennent exactement 3 fois la base A ?

d. Combien de suites de 10 bases contiennent au moins une fois la base A ?

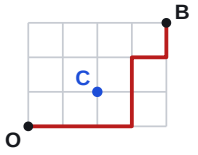
5 On va de O à B en suivant les lignes du quadrillage, par des pas d'une case vers la droite (D) ou vers le haut (H). B est 4 cases à droite et 3 cases au-dessus de O ; C est 2 cases à droite et 1 case au-dessus de O. ●●○

a. Écrire le mot qui code le chemin rouge. Combien de lettres D et de lettres H compte tout chemin de O à B ?

b. En déduire le nombre de chemins de O à B.

c. Combien de chemins de O à B passent par C ?

d. Combien de chemins de O à B ne passent pas par C ?



Un chemin de O à B.

6 **Repérer l'erreur. On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes, qui compte 8 cœurs. Lina dénombre les mains qui contiennent au moins un cœur : « je choisis un cœur (8 choix), puis 2 cartes parmi les 31 restantes, soit $8 \times \binom{31}{2} = 3\,720$ mains ».** ●●○

a. Calculer le nombre total de mains, puis le nombre de mains sans cœur.

b. En déduire le nombre de mains avec au moins un cœur. Le résultat de Lina est-il juste ?

c. Expliquer son erreur, en indiquant combien de fois elle compte une main à 2 cœurs, et une main à 3 cœurs.

d. Les mains étant équiprobables, calculer la probabilité d'obtenir au moins un cœur, arrondie au centième.

7 **Algorithmique. On reprend la fonction `pascal` et la liste `P2` du cours, avec `E = ["a", "b", "c", "d"]`.** ●●●

a. Quelles valeurs la variable `L` prend-elle successivement lors de l'appel `pascal(4)` ? Que renvoie cet appel ?

b. Écrire la liste `P2`. Combien d'éléments compte-t-elle ? Quel coefficient binomial retrouve-t-on ?

c. On remplace la condition `x < y` par `x != y`. Combien d'éléments la nouvelle liste compte-t-elle ? Expliquer.

d. Si `E` compte 6 éléments, prévoir la longueur de `P3` sans exécuter le programme.

8 **Soit n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. On veut démontrer de deux façons que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.** ●●●

a. Démontrer l'égalité par le calcul, à l'aide des factorielles.

b. Un club compte n membres. On forme un comité de k membres, dont l'un est président. En comptant ces comités de deux façons (le comité d'abord, ou le président d'abord), retrouver l'égalité.

c. Application : un club de 10 membres forme un comité de 4 membres dont un président. Calculer le nombre de possibilités des deux façons.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Dénombrement — k-uplets, permutations, combinaisons ».